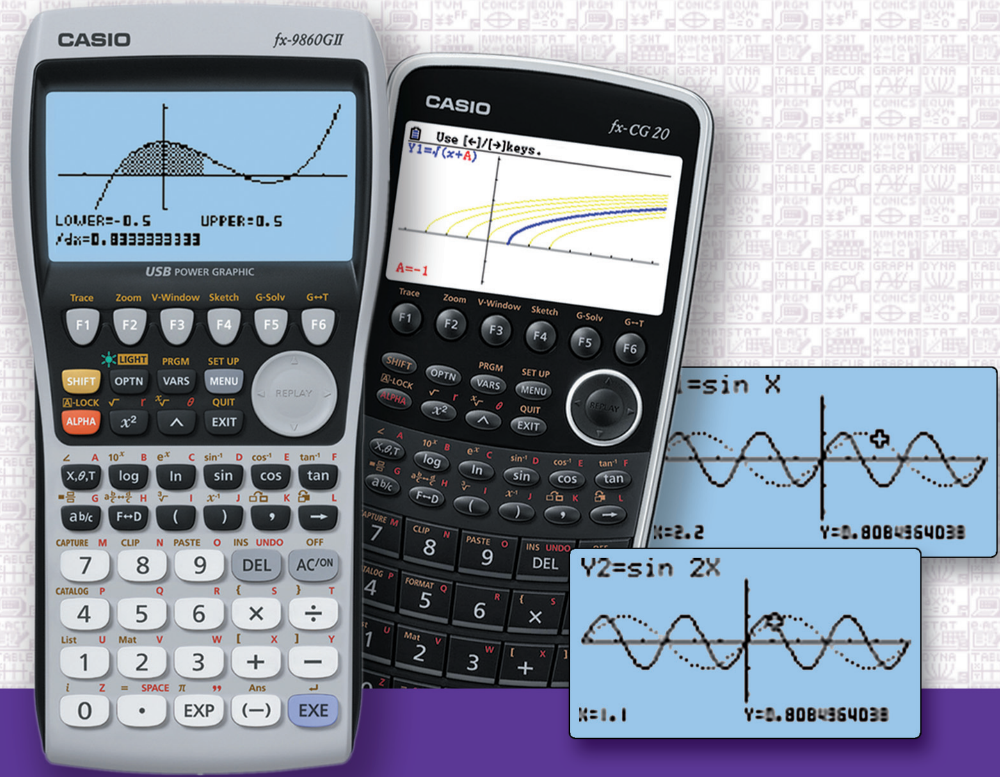
С.С. Минаева

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

К ИЗУЧЕНИЮ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА В 10-11 КЛАССАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ МАЛЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ



МИНАЕВА С.С.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ АЛГЕБРЫ И НАЧАЛ АНАЛИЗА В 10–11 КЛАССАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ МАЛЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ

Под ред. И.Е. Вострокнутова

Москва
2009

УДК 005
ББК 74.262.21
М545

Минаева С.С.

М545 Методические рекомендации к изучению алгебры и начал анализа в 10–11 классах с использованием возможностей применения малых вычислительных средств / Под ред. И.Е. Вострокнутова. — М. : изд-во «Принтберри», 2009. — 92 с.
ISBN 978-5-91451-009-8

Пособие предназначено для учителей математики, ведущих преподавание в 10—11 классах, оснащенных графическими калькуляторами. В пособии рассматриваются вопросы из курса алгебры и начал анализа, при изучении которых целесообразно обращение к калькулятору. Изложение сопровождается рассмотрением разнообразных примеров из опыта использования калькулятора на уроках математики в школах, участвующих в проекте «Школьный калькулятор».

УДК 005
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-91451-009-8

Предисловие

В настоящее время калькулятор в руках учителя — это значительный потенциал в создании дополнительных возможностей для обеспечения более глубокого и осознанного усвоения учащимися вопросов, связанных с расчетами, построением и исследованием графиков функций. Однако бесспорно то, что «подключение» калькулятора ни в коем случае не должно становиться самоцелью.

На страницах периодической печати не раз обсуждалась перспектива прихода калькулятора в школу. В частности отмечалось, что свобода выбора современной модели калькулятора не только устраняет технические трудности. Благодаря калькулятору появилась реальная возможность работать с практическими данными, наблюдать по ходу числовых расчетов за промежуточными результатами, прогнозировать ответ. В обращении с калькулятором учащиеся естественно включаются в работу с разными знаковыми системами (формулами, таблицами, графиками), что весьма полезно в воспитании их математической культуры. Калькулятор становится активным помощником в формировании знаний и умений у учащихся, обеспечивая большую наглядность излагаемого материала, побуждая учащихся к проявлению творческой и исследовательской инициативы.

Кроме того, современные калькуляторы обладают значительными демонстрационными возможностями: все осуществляемые с их помощью действия могут быть спроецированы на большой экран с помощью оборудования, входящего в стандартные учебные комплекты.

Отметим, что у учителя расширились возможности находить инновационные и нестандартные методические решения при изложении некоторых вопросов школьного курса математики, требующих анализа числовой и графической информации.

В данном пособии рассмотрены примеры использования возможностей применения калькулятора при изучении основных разделов курса алгебры и начал анализа 10—11 классов. Расчеты и графические построения выполнены с помощью калькулятора CASIO *fx*-9860G.

В изложении использованы примеры из действующих учебников для школьного курса алгебры и начал анализа:

1. Алгебра и начала анализа: учебник для 10—11 кл. общеобраз. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 2006.

2. Алгебра и начала анализа. 10 кл.: Учебник для общеобраз. учреждений / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнецова, Е.А. Седова. — М.: Дрофа, 2004.

3. Алгебра и начала анализа. 10 кл.: Задачник для общеобраз. учреждений / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнецова, Е.А. Седова. — М.: Дрофа, 2004.

4. Алгебра и начала анализа. 10—11 кл.: Учебник для общеобраз. учреждений / А.Г. Мордкович. — М.: Мнемозина, 2003.

5. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 кл. общеобраз. учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2003.

1. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

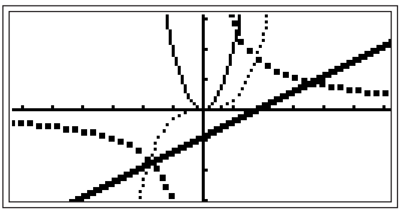
1.1. Графическая интерпретация

Без четких и сознательных представлений учащихся о графике невозможно привлечение геометрической наглядности при формировании значительного числа функциональных понятий. График широко используется при изучении многих разделов других школьных предметов (физики, химии, географии, биологии). Поэтому к моменту обучения в старших классах у учащихся должны быть выработаны умения как в построении, так и в чтении графиков разнообразных функций.

В настоящее время в основной школе изучается довольно широкий круг вопросов, связанных с функцией. Программа предусматривает знакомство учащихся с понятием числовой функции и способами ее задания, овладение такими общими понятиями, как область определения функции, график функции, возрастание и убывание функции, наибольшее и наименьшее значения функции, нули функции, промежутки знакопостоянства. Все это, естественно, сопровождает изучение конкретных числовых функций, их свойств и графиков:

$$y = kx + l,\ y = \frac{k}{x},\ y = ax^2 + bx + c,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x},\ y = \sqrt[3]{x},\ y = |x|.$$

Так, например, при выполнении задания на соотнесение каждого из графиков, изображенных на рисунке (см. ниже) разными линиями (тонкой линией, толстой линией, тонким пунктиром, толстым пунктиром), с одной из данных формул: $y = 0{,}5x — 1$, $y = 2x^2$, $y = \frac{3}{x}$, $y = 0{,}3x^3$ — непременно требуется от учащегося обоснование своего выбора. (Рисунок выполнен с помощью графического калькулятора. При наличии кодоскопа его можно вывести на экран и предложить задание во фронтальной работе с классом.)



Необходимо стремиться к тому, чтобы учащиеся умели схематически изображать достаточно точные эскизы графиков функций в тетради, показывать расположение графиков некоторых конкретных функций в координатной плоскости, прогнозировать, в каких координатных четвертях пройдет данный график. Базу для таких самостоятельных действий создает твердое знание основного теоретического материала курса 7—9 классов. Поэтому желательно в 10 классе активизировать деятельность учащихся, отражающую использование знаний и умений, сформированных в основной школе. Именно с этой позиции рассмотрим несколько задач с функционально-графической тематикой.

1. Предложим задачи, активизирующие знания учащихся о взаимном расположении графиков вида $y = kx + l$ в координатной плоскости в зависимости от изменения значений коэффициентов k и l.

1) *В одной системе координат постройте прямые, заданные уравнениями:*

$$y = 2{,}5x + 5,\ y = -2{,}5x + 5,\ y = 0{,}5x - 1,\ y = -0{,}5x - 1.$$

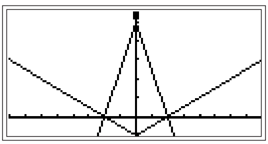
Как называется многоугольник, получившийся при пресечении этих четырех прямых? Прочитайте координаты его вершин.

Комментарий к решению

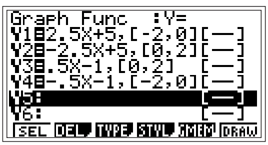
Конечно, данная задача может быть решена без калькулятора. При последовательном построении каждой прямой учащиеся видят, что часть плоскости «отсекается» этой прямой, в результате ограничивается четырехугольник. Это дельтоид с вершинами в точках (–2; 0), (0; 5), (2; 0), (0; –1).

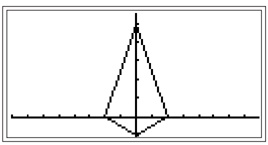
Однако использование графического калькулятора, сняв технические трудности, позволит не только усилить наглядность, но потребует от учащихся прямого применения знаний и умений.

Сначала на экране калькулятора получим изображение 4 прямых:

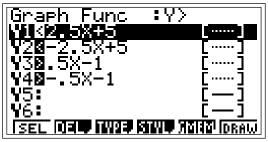


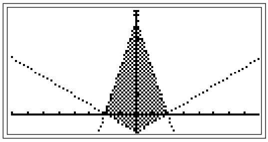
Теперь можно убрать «усы», используя умение указать кусочно-заданные прямые:





Можно поступить по-иному: закрасить дельтоид. Для этого надо задать систему неравенств: в каждой формуле поменять знак равенства на знак неравенства, соответствующий закрашиваемой части плоскости:



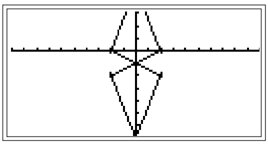


2) *Задайте уравнениями прямых четырехугольник, симметричный дельтоиду, рассмотренному в предыдущей задаче, относительно прямой* $y = -1$.

Комментарий к решению

Очевидно, что новый четырехугольник должен иметь пару вершин, принадлежащих оси ординат — это точки (0; –1) и (0; –7). Заметим, что прямые $y = 0{,}5x - 1$ и $y = -0{,}5x - 1$ можно использовать для построения нового четырехугольника, т. к. их части симметричны «нижним» сторонам данного дельтоида относительно рассматриваемой прямой $y = -1$ и проходят через точку (0; –1). А через точку (0; –7) проведем прямые, симметричные «верхним» сторонам дельтоида; имеем еще одну пару прямых: $y = 2{,}5x - 7$ и $y = -2{,}5x - 7$. Получим дельтоид с вершинами в точках: (–2; –2), (0; –1), (2; –2), (0; –7).

С калькулятором в руках можно выполнить соответствующие построения, «убрав усы»:



3) *Подберите уравнение прямой, которая параллельна данной:* $y = -0{,}5x + 1{,}5$ *— и проходит:*

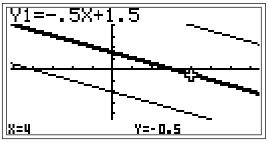
а) *через точку* (4; 4);

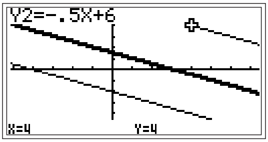
б) *через точку* (4; –4).

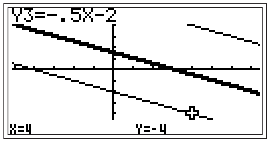
Комментарий к решению

Речь идет о построении двух прямых $y = kx + l$, параллельных данной. Каждая из них сохраняет то же направление, что и прямая $y = -0{,}5x + 1{,}5$, т. е. $k = -0{,}5$. Меняется l (получить значение l можно подстановкой координат точки, через которую должна пройти прямая $y = -0{,}5x + l$): для первой прямой $l = 6$, для второй прямой $l = -2$.

Используя калькулятор, проверим свои рассуждения:







Дополнительные задания:

4) *Постройте на координатной плоскости четыре прямые так, чтобы при их пересечении образовался:*

а) *квадрат с центром симметрии в начале координат;*

б) *ромб с центром симметрии в начале координат;*

в) *параллелограмм с центром симметрии в начале координат.*

5) *Постройте в координатной плоскости какой-нибудь равнобедренный треугольник, осью симметрии которого является:*

а) *ось ординат;*

б) *ось абсцисс;*

в) *прямая* $y = x$.

При выполнении заданий, подобных данным, позволим учащимся поэкспериментировать, а затем продемонстрируем аналитическое описание и графики полученных решений.

2. В систему упражнений желательно включать задачи, влияющие на развитие понимания того, что функция — это математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами.

Так, линейная функция служит основой большого количества математических моделей, которые позволяют исследовать многие действительные процессы. В действительности эти процессы не совсем линейны, но для целей исследования, для целей практики достаточно их линейное приближение.

6) *Свеча, поставленная в банку, возвышается над ее краем на* 16 *см. Длина свечи* 24 *см. Известно, что она полностью сгорает за* 8 *ч. Составьте формулу, выражающую зависимость длины свечи от времени ее горения.*

Постройте график зависимости длины свечи от времени ее горения и, используя график, ответьте на вопросы:

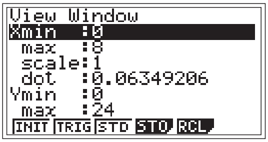
а) *Через какое время фитиль свечи окажется на уровне края банки?*

б) *Через какое время от начала горения от свечи останется* 16 *см?*

в) *Сколько сантиметров останется от свечи через* 3 *ч* 30 *мин от начала ее горения?*

Комментарий к решению

Так как длина свечи 24 см, и она сгорает полностью за 8 ч, то можно допустить, что она уменьшается примерно на 3 сантиметра в час. Выразим зависимость длины свечи от времени ее горения формулой $y = 24 - 3x$ и построим соответствующий график:



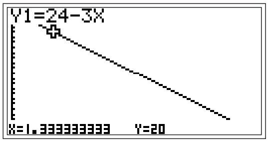
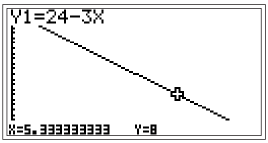


График отражает процесс горения свечи. По графику видно, что в процессе горения длина свечи уменьшается. Так, например, через 1,333... ч ($1\frac{1}{3}$ ч) длина свечи станет равной 20 см, т.е. уменьшится на 4 см. Знание о пропорциональных величинах позволит учащимся сразу же ответить на вопросы, используя полученный результат.

Но в данном случае можно не спешить. Посоветуем учащимся продолжить графическое исследование.

а) Заметим, что для ответа на вопрос «Через какое время фитиль свечи окажется на уровне края банки?», его надо переформулировать: «Через какое время от начала горения длина свечи будет равна 8 см?». По графику найдем значение x, соответствующее y, равному 8.

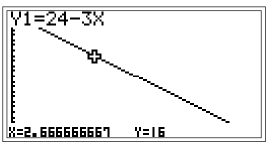


Получим $x = 5{,}333...$

Ответ: примерно через $5\frac{1}{3}$ ч (5 ч 20 мин).

б) Чтобы ответить на вопрос: «Через какое время от начала горения от свечи останется 16 см?», воспользуемся пропорциональностью. В рассматриваемом случае сгорело 8 см свечи, т.е. в 2 раза меньше, чем в предыдущем, когда сгорело 16 см, поэтому время горения уменьшится в 2 раза ($5\frac{1}{3} : 2 = 2\frac{2}{3}$).

Убедиться в таком решении поможет график. По графику найдем значение x для y, равного 16:



Получим $x = 2{,}666...$

Ответ: примерно через $2\frac{2}{3}$ ч (2 ч 40 мин).

в) Чтобы ответить на вопрос «Сколько сантиметров останется от свечи через 3,5 ч ее горения?», воспользуемся графиком.

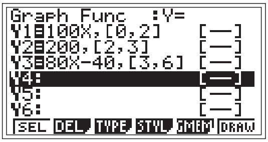
Ответ: примерно 13 см.

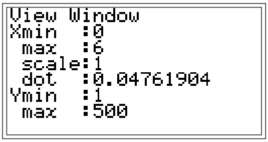
7) *Поезд, вышедший из пункта А, шел в течение двух часов со скоростью* 100 *км/ч и, прибыв в пункт В, стоял там один час, а затем шел дальше в течение трех часов со скоростью* 80 *км/ч.*

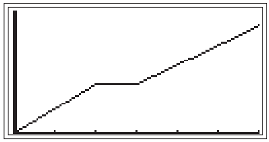
Задайте функцией изменение расстояния, пройденного поездом, от времени его движения.

Комментарий к решению

Понятно, что речь идет о задании функции на разных частях ее области определения, т. е. о кусочно-заданной функции. Легко задается функция на первых двух участках. Чтобы задать функцию на третьем участке, посоветуем учащимся составить уравнение прямой, проходящей, например, через точки (3; 200) и (4; 280). Имеем:





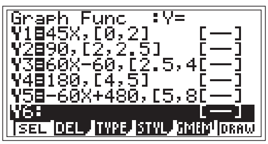


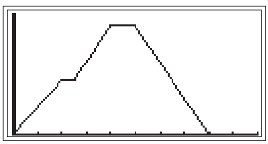
Дополнительные задания:

8) *Автомобиль отъехал от заправки и шел один час со скоростью* 100 *км/ч до пункта дорожного контроля. Там он сделал остановку на два часа, а затем ехал дальше в течение трех часов со скоростью* 120 *км/ч. Задайте функцией изменение расстояния, пройденного автомобилем, от времени его движения.*

9) *Туристы шли со скоростью* 6 *км/ч и пришли к озеру через два часа после выхода с турбазы. У озера они пробыли три часа, а обратная дорога на турбазу заняла три часа. Задайте функцией изменение расстояния, пройденного туристами, от времени их движения.*

10) *С помощью кодоскопа на экран выведем показания с экрана калькулятора, подготовленные учителем заранее. А именно, построение графика движения поезда:*





Зададим вопросы:

а) *В течение каких промежутков времени поезд двигался в прямом направлении? в обратном направлении?*

б) *Являлось ли движение поезда равномерным?*

в) *Сколько времени затрачено на весь путь?*

г) *Сколько всего километров прошел поезд?*

11) *Скоростной лифт движется вниз равномерно со скоростью* 10 *м/с. В лифтовую шахту с высоты* 15 *м от лифта упал некоторый предмет. Используя графики зависимости расстояния от времени движения тела, ответьте на вопросы:*

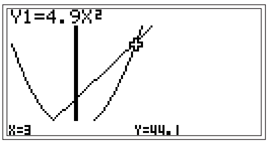
а) *Через какое время расстояние между предметом и лифтом уменьшится на* 5 *м?*

б) *Через какое время предмет «догонит» лифт?*

Комментарий к решению

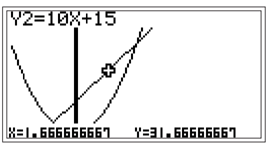
Используем известные из курса физики формулы зависимости расстояния от времени движения тела. Справка: закон движения свободно падающего тела имеет вид $S = \dfrac{gt^2}{2}$, где $g = 9{,}8$ м/с² — ускорение свободного падения, S — путь в метрах, который тело пролетит за t секунд.

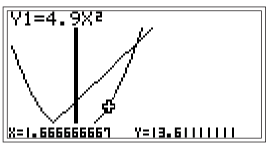
Для падающего предмета имеем $S_1 = 4{,}9t^2$, а для лифта, движущегося равномерно со скоростью 10 м/с, имеем $S_2 = 10t + 15$, где S — путь в метрах, который тело (предмет или лифт) пролетит за t секунд. Построим в одной системе координат два графика:



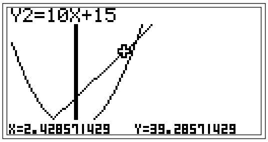
Мы видим, что графики пересекаются в точке, примерные координаты которой (3; 44,1), поэтому сразу можем ответить на второй вопрос задания: падающий предмет догонит лифт примерно через 3 с, пролетев около 44 м.

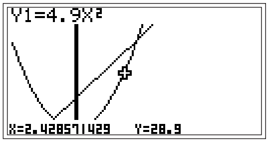
Для ответа на первый вопрос задания будем наблюдать за изменением расстояния между лифтом и предметом:





В данном случае расстояние между лифтом и предметом равно примерно 18 м. Отсюда видно, что через $1\dfrac{2}{3}$ секунды расстояние еще не уменьшилось, а даже наоборот увеличилось на 3 м. Будем продвигаться дальше по графикам вправо и, сравнивая значения ординат для одного и того же значения абсциссы, продолжать рассматривать разницу между их значениями.





Примерно через 2,4 секунды от начала одновременного движения расстояние между лифтом и предметом приблизится к 10 м, то есть уменьшится примерно на 5 м, и при этом предмет пролетит около 29 м.

Для некоторых учащихся решение станет нагляднее, если дополнительно провести несколько прямых вида $x = c$ и понаблюдать за показаниями данной функции для одного и того же x.

3. Известный математик и методист В.Л. Гончаров писал, что функция неотделима от ее графического представления и график функции является средством осмысливания рассматриваемых математических фактов. Действительно, полезно предлагать задачи, в работе над которыми формируется понимание связи между аналитической формулировкой задачи и ее графической интерпретацией.

Нередко процесс решения таких задач связан с довольно сложной вычислительной работой — вычисление различных значений функции, построение произвольных графиков по точкам и пр. И здесь имеет смысл обратиться к калькулятору.

12) *Известно, что нормальный вес человека можно определить по показателю массы тела (ПМТ). Чтобы определить ПМТ, нужно измерить свой вес (P в кг) и рост (H в м), а затем рассчитать по формуле:*

$$\textit{ПМТ} = \frac{P}{H \cdot H}.$$

Человеку рекомендуется поддерживать ПМТ в пределах от 20 *до* 25. *При ПМТ ниже* 20 *наблюдается дефицит массы тела, выше* 25 *— избыток, причем выше* 30 *— ожирение. (Такой анализ ПМТ рекомендован Британской медицинской ассоциацией.)*

Многократный анализ ПМТ (например, для группы спортсменов) удобно вести, имея под рукой его графическое представление. Как же его получить?

Запишем формулы для «граничных» ПМТ:

при ПМТ, равном 20, *имеем:* $20 = \frac{P}{H^2}$ *; выразив P, получим:* $P = 20H^2$;

аналогично при ПМТ, равном 25, *получим:* $P = 25H^2$.

Постройте графики полученных зависимостей в одной и той же координатной плоскости.

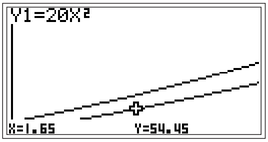
а) *По графикам определите нормальный вес человека при росте* 1,65 *м.*

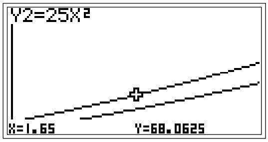
б) *Покажите графически области, соответствующие норме веса при изменении роста от* 1,3 *м, а также отклонения от нормы.*

Комментарий к решению

Построим графики рассматриваемых зависимостей в одной и той же координатной плоскости. Понятно, что это части парабол, расположенные в первой четверти координатной плоскости. Для графического калькулятора зададим параметры окна вывода графиков: по оси абсцисс будем изменять рост (Н в м) от 1,3 до 2 м, а по оси ординат — вес (Р в кг) от 30 до 150 кг.

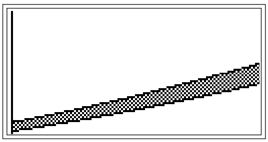
а) Определим по графикам, каким может быть нормальный вес человека при росте 1,65 м (для перемещения по графику используем курсор):



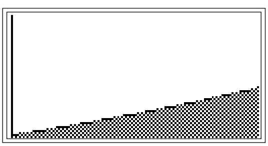


Можно предположить, что нормальный вес человека при росте 1,65 м находится в пределах от 55 до 68 кг (для наглядности можно провести прямую $x = 1{,}65$).

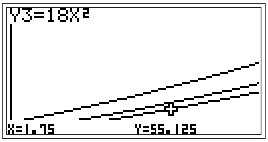
б) Советуем показать учащимся область, соответствующую норме веса при изменении роста от 1,3 м. Для этого выделим ее с помощью неравенств: $y \geq 20x^2$ и $y \leq 25x^2$:



Отклонения от нормы покажем графически: первое изображение иллюстрирует область, соответствующую отклонению от нормы веса при изменении роста от 1,3 м — дефицит массы тела, а второе — избыток массы тела.

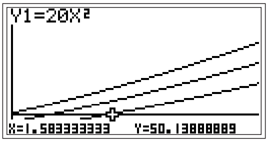


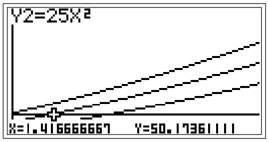
Известно, что манекенщицы озабочены своим весом, поэтому многие из них доводят себя до истощения. В их профессиональных кругах ведутся споры о том, при каком ПМТ манекенщиц можно допускать для участия в дефиле (без обмороков). Считается, что, допустим, показатель не ниже 18, и в рекомендациях приводится пример: при росте 175 см вес не должен быть ниже 55 кг. Это соответствует нашей графической интерпретации:



Дополнительно: определим, каким может быть нормальный рост человека при весе 50 *кг.*

Для наглядности в той же координатной плоскости построим прямую $y = 50$:





Ответ: нормальный рост человека при весе 50 кг равен примерно 1,5 м.

13) *У Саши есть аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда. Вместо него он хочет купить аквариум в форме усеченного шара и поставить его выпуклой частью на специальную подставку. Причем желательно, чтобы новый аквариум был не шире прежнего и имел примерно тот же объем.*

В магазине продавец объяснил Саше, что в продаже есть шарообразные аквариумы, имеющие в диаметре 9, 7 *и* 5 *дм, и что объем аквариума зависит не только от его диаметра, но и от его высоты.*

Какой новый аквариум выберет Саша, если его аквариум имеет размеры дна 4×7 *дм при высоте* 5 *дм?*

Комментарий к решению

Подсказка: объем шарообразного аквариума можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h),$$

где R — радиус шара-основы для аквариума, h — высота аквариума.

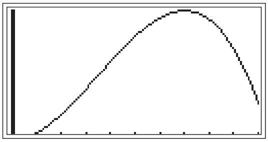
Если известны объем и радиус аквариума, можно найти его высоту.

Чтобы воспользоваться подсказкой, надо сначала определить радиус шара-основы для аквариума. Поскольку аквариум не должен быть шире прежнего, то очевидно, что выбирать желательно из аквариумов с диаметром 7 дм, т.е. с радиусом, равным 3,5 дм.

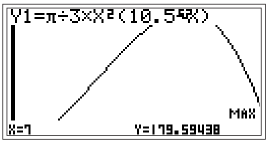
Подставив значение радиуса в выражение $\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h),$ получим формулу зависимости объема нового аквариума от его высоты:

$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(10{,}5-h).$$

Построим график такой зависимости:

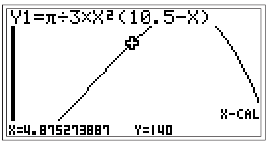


Прежний аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда имел в основании прямоугольник с размерами 4×7 дм и высоту, равную 5 дм. Поэтому его объем равен 140 дм^3. Теперь определим по графику, имеет ли смысл выбирать среди рассматриваемых аквариумов новый, имеющий объем не менее 140 л:



Видим, что максимальный объем равен примерно 180 л, отсюда ответ: да, среди данных аквариумов может оказаться требуемый.

По графику определим, при какой высоте аквариум соответствует требуемому объему:



Ответ: Саша выберет аквариум с диаметром 7 дм и высотой не менее 4,9 дм.

14) *Ленту скотча длиной L см и толщиной* 0,1 *мм требуется плотно намотать на картонную трубу, чтобы получить его упаковку в виде цилиндра с диаметром (в основании упаковки), равным* 10 *см.*

Составьте формулу, выражающую зависимость выбора диаметра трубы d (в см) от длины скотча L (в см) в такой упаковке.

а) *Вычислите d (в см) по формуле при L* = 2500 *см.*

б) *Построив график зависимости d(L), определите, какой длины надо взять ленту скотча, если имеется картонная труба с диаметром, равным* 9 *см.*

Комментарий к решению

Площадь основания цилиндра равна 25π см^2. Лента (а точнее, ее край) заполняет площадь, равную $0{,}01L$ см^2 (произведение длины ленты на ее толщину).

Сердцевина (т.е. интересующая нас труба) имеет площадь основания, равную $25\pi - 0{,}01L$ см^2.

Обозначив через d (в см) диаметр трубы, составим уравнение

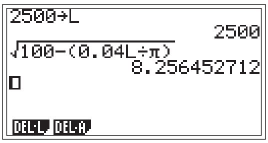
$$\frac{\pi d^2}{4} = 25\pi - 0{,}01L,$$

отсюда

$$d = \sqrt{100 - \frac{0{,}04L}{\pi}},$$

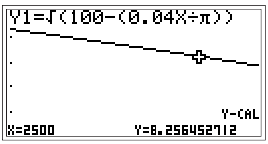
где L (в см) — длина скотча.

а) Выполним вычисления:

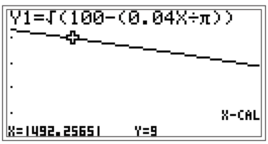


Ответ: чтобы получить упаковку скотча с длиной ленты 25 м в виде цилиндра с диаметром в основании, равным 10 см, надо взять трубу, диаметр которой равен примерно 8 см.

Тот же ответ мы получим, если воспользуемся графиком:



б) Определим по графику, какой длины надо взять скотч, если имеется картонная труба с диаметром, равным 9 см:



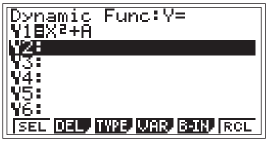
Ответ: чтобы получилась упаковка, рассматриваемая в условии задачи, надо взять примерно 15 м скотча.

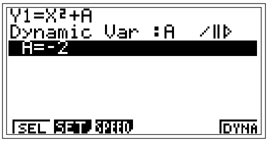
1.2. Преобразование графиков

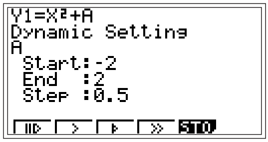
Рассмотрим несколько приемов построения графиков функций, которые нам пригодятся в дальнейшем при изучении новых функций в курсе алгебры и начал анализа.

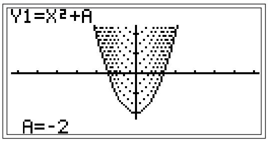
Параллельный перенос вдоль оси ординат. Учащиеся уже встречались в основной школе с подобным случаем при построении параболы. Рассмотрим, выполняя построения в тетради, как выглядит график функции $y = x^2 + A$ при изменении A от -2 до 2 с шагом 0,5. Сравнивая графики функций $y = x^2 + A$ и $y = x^2$, видим, что ординаты графика заданной функции изменяются на A единиц.

То же мы подметим на экране калькулятора. Воспользуемся динамическим режимом работы графического калькулятора. Введем функцию, войдем в меню VAR (нажав [F4]), введем параметры изменения A в меню SET, зададим нормальную скорость смены графиков в меню SPEED. Вернувшись из него в меню VAR, нажмем DYNA для построения графиков и увидим меняющееся положение параболы:



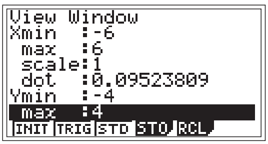


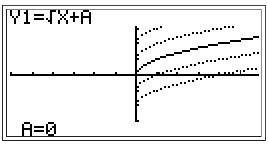




Отметим, что на экране будет оставаться след предыдущего изображения, если включить функцию слежения за перемещением точек графика Locus (locus, англ. — траектория). Для этого в меню настроек SET UP (вход в него — [SHIFT], [MENU]), надо выделить строку Locus и нажать функциональную клавишу, соответствующую команде On из нижней строки экрана.

Предложим учащимся построить график функции $y = \sqrt{x} + A$ при изменении A от -2 до 2 с шагом 1. Получим:

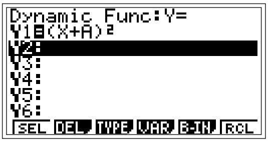


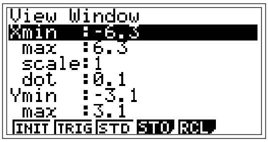


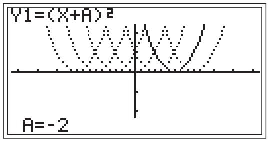
Сделаем вывод: чтобы построить график функции $y = f(x) + A$, надо построить график $y = f(x)$ и перенести его вдоль оси ординат на A единиц.

Параллельный перенос вдоль оси абсцисс. Учащиеся уже встречались в основной школе с подобным преобразованием. Рассмотрим, выполняя построения в тетради, как выглядит график функции $y = (x + A)^2$ при изменении A от -3 до 3 с шагом 1. Сравнивая графики функций $y = (x + A)^2$ и $y = x^2$, видим, что абсциссы графика заданной функции изменяются на $-A$ единиц.

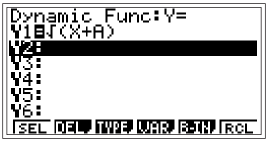
То же мы подметим на экране калькулятора:

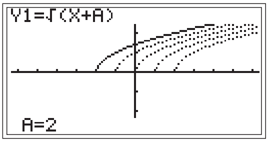






Предложим учащимся построить график функции $y = \sqrt{x + A}$ при изменении A от -2 до 2 с шагом 1. Получим:

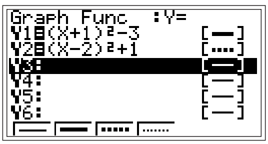


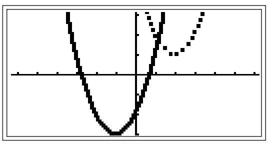


Сделаем вывод: чтобы построить график функции $y = f(x + A)$, надо построить график $y = f(x)$ и перенести его вдоль оси абсцисс на $-A$ единиц.

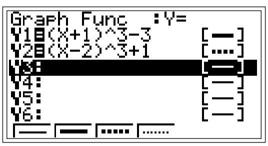
Одновременный сдвиг вдоль осей. Можно предложить учащимся задание для самостоятельной работы с проверкой на калькуляторе выполняемых построений.

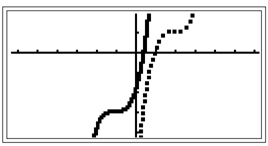
1) *Постройте графики функций*: а) $y = (x + 1)^2 - 3$; б) $y = (x - 2)^2 + 1$.
Сравним эскиз с изображением на экране калькулятора:



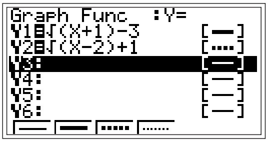


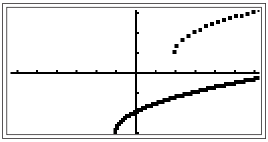
2) *Постройте графики функций*: а) $y = (x + 1)^3 - 3$; б) $y = (x - 2)^3 + 1$.
Сравним эскиз с изображением на экране калькулятора:





3) *Постройте графики функций*: а) $y = \sqrt{x+1} - 3$; б) $y = \sqrt{x-2} + 1$. Сравним эскиз с изображением на экране калькулятора:

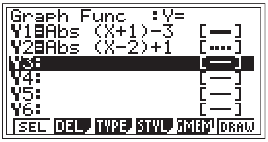


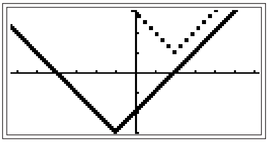


4) *Постройте графики функций*: а) $y = |x + 1| - 3$; б) $y = |x - 2| + 1$.

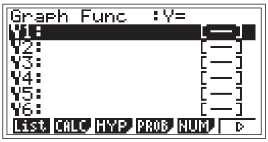
Комментарий к решению

Выполним построения сначала в тетради, а затем сравним эскиз с калькулятором:

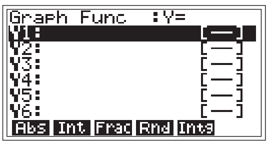




Напомним, что функция $y = |x|$ входит в число стандартных функций, предусмотренных в калькуляторе. Но, во-первых, она записывается в несколько иной форме — Abs x (от англ. absolute — абсолютная величина), а, во-вторых, она не выведена в качестве значения какой-либо клавиши. Вводить ее придется через меню. Для ввода функций через меню следует нажать клавишу [OPTN]. Меню функциональных клавиш примет вид (см. нижнюю строку экрана калькулятора):



Теперь надо перейти в подменю NUM, нажав клавишу [F5] (NUM):

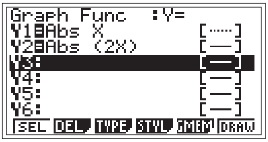


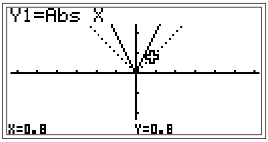
Значения функциональных клавиш снова изменятся. Среди них появится Abs. Теперь нажатие [F1] (Abs) приведет к появлению имени этой функции в строке ввода функции. В качестве ее аргумента в случае а) надо ввести $x + 1$, нажав соответствующие клавиши калькулятора.

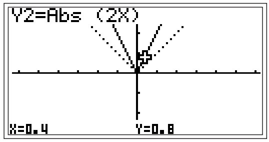
Растяжение (или сжатие) в данном отношении вдоль оси абсцисс. Рассмотрим данное преобразование на конкретном примере построения графика функции $y = |2x|$, если известен график функции $y = |x|$.

Легко понять, что для получения одинаковых значений обеих функций надо придать аргументу x функции $y = |2x|$ значения в 2 раза меньшие, чем аргументу функции $y = |x|$. Следовательно, чтобы построить график функции $y = |2x|$, надо переместить точки графика $y = |x|$ вдоль оси абсцисс на такое расстояние, чтобы абсциссы их стали в два раза меньше.

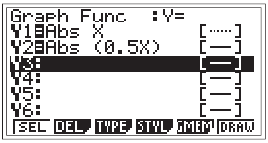
Покажем сначала в тетради примерное расположение графиков, а потом убедимся в правильности эскиза с помощью калькулятора (обратим внимание на значения x и y, отображаемые в нижней строке экрана калькулятора в режиме Trace).

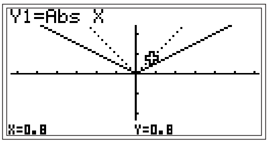


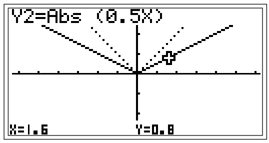




А чтобы построить график функции $y = |0{,}5x|$, зная график функции $y = |x|$, перемещают точки графика $y = |x|$ вдоль оси абсцисс так, чтобы абсциссы этих точек стали в два раза больше, т. е. растягивают график функции вдоль оси абсцисс в два раза:



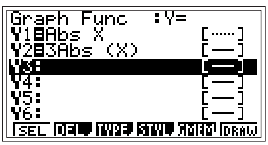


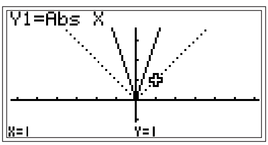


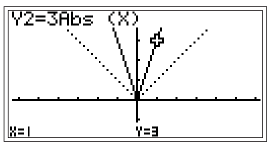
Растяжение (или сжатие) в данном отношении вдоль оси ординат. Рассмотрим данное преобразование на конкретном примере построения графика функции $y = 3|x|$, если известен график функции $y = |x|$.

Понятно, что при одних и тех же значениях x значения функции $y = 3|x|$ в три раза больше значений функции $y = |x|$. Следовательно, для построения данного графика достаточно увеличить все ординаты функции $y = |x|$ в три раза, т. е. произвести растяжение графика в три раза вдоль оси ординат.

Покажем в тетради примерное расположение графиков и убедимся в правильности эскиза с помощью калькулятора (обратим внимание на показания нижней строки на экране калькулятора).

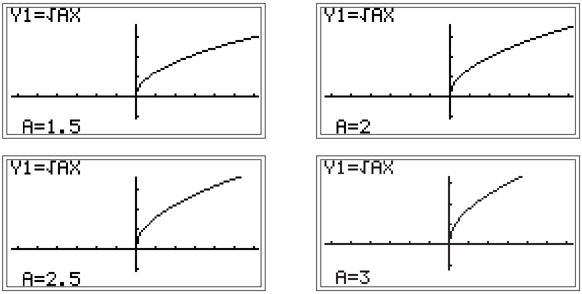




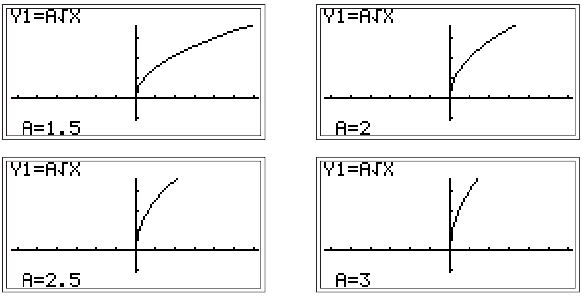


Воспользуемся динамическим режимом, чтобы усилить наглядность данных преобразований. Перед учащимися возникнут сменяющие друг друга графики, вид которых зависит от изменяющегося значения коэффициента A.

Например, для $y=\sqrt{Ax}$ при изменении A от 1 до 3 с шагом 0,5 имеем сжатие вдоль оси абсцисс:



Для $y=A\sqrt{x}$ при изменении A от 1 до 3 с шагом 0,5 имеем растяжение вдоль оси ординат:



1.3. Чтение графика

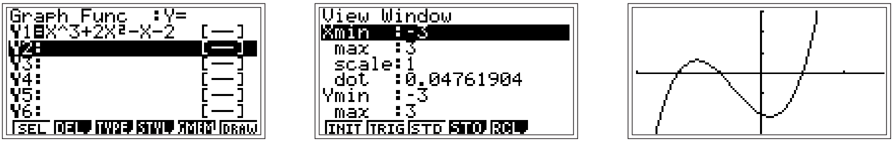
При рассмотрении функций отмечают важные для исследования моменты. Отметим и мы их, одновременно соотнеся с графическим представлением:

- область определения функции — проекция графика функции на ось абсцисс;
- корни функции — абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс;
- промежутки знакопостоянства функции — интервалы оси абсцисс, соответствующие точкам графика функции, лежащим выше (или ниже) нее;
- точки экстремума — точки, вблизи которых график функции выгибается и имеет вид горба (максимум) или впадины (минимум);
- промежутки монотонности функции — интервалы оси абсцисс, на которых график функции идет вверх (или вниз);

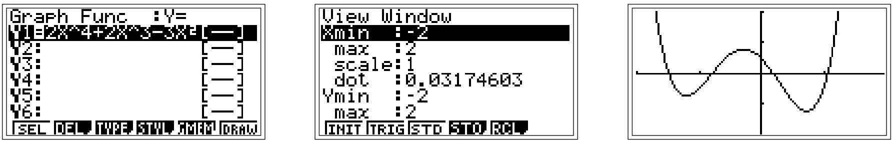
- наибольшее и наименьшее значения функции — ординаты самой высокой и самой низкой точек графика функции;
- область значений функции — проекция графика функции на ось ординат.

В качестве примеров для исследования можно предложить графики функций, представленные многочленами третьей и четвертой степени. Например, такие:

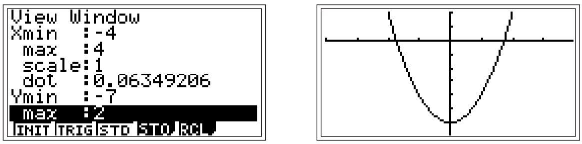
$y = x^3 + 2x^2 - x - 2$:



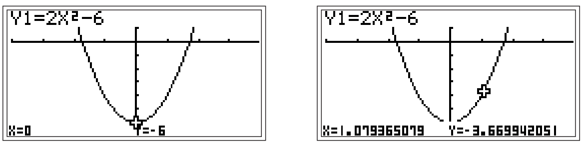
$y = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 0{,}5$:



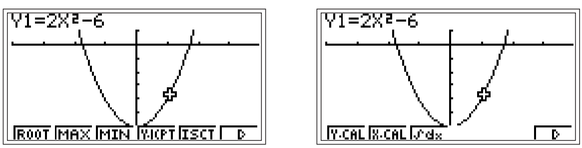
Чтобы напомнить учащимся, как использовать помощь калькулятора, для начала рассмотрим графическое исследование функции $y = 2x^2 - 6$:



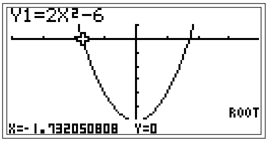
В режиме Trace ([SHIFT] и [F1]) значения *x* и *y* выводятся в нижней строке экрана:

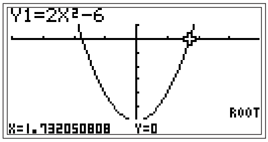


В режиме G-Solv (вход в режим — последовательное нажатие клавиш [SHIFT] и [F5]) предусмотрено много возможностей исследования графиков; продолжение просмотра меню функциональных клавиш осуществляется нажатием клавиши [F6]:



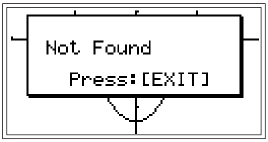
ROOT позволяет найти координаты точек пересечения графика функции с осью x (перевод курсора с одного корня на другой осуществляется с помощью клавиши [REPLAY]):

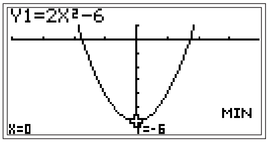




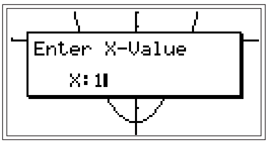
Обратим также внимание на то, что выполняемая команда фиксируется калькулятором в нижней правой части экрана. Это относится ко всем командам данного меню.

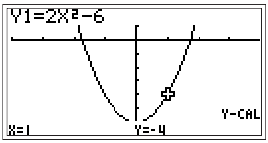
MAX и MIN позволяют найти соответственно максимальное и минимальное значение функции. В данном случае найти максимальное значение функции невозможно, оно равно бесконечности, а вот минимальное равно –6:





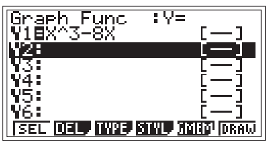
Y-CAL и X-CAL позволяют найти координату точки графика по заданному значению другой координаты. Например, Y-CAL находит значение y по заданному значению x:

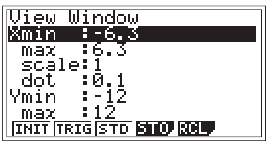


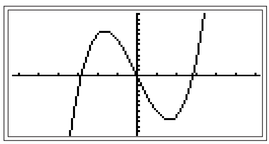


ISCT используется при одновременном выводе графиков двух функций для определения точек их пересечения.

Рассмотрим график функции $y = x^3 - 8x$. Сохраним стандартное значение параметров для x, а вот по оси y несколько «сплющим» график:

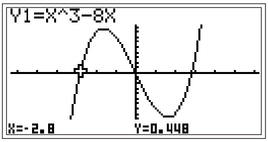


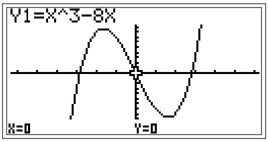


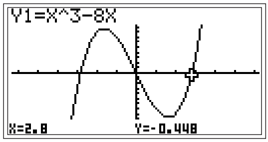


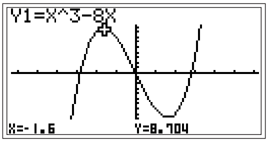
Построив график с помощью калькулятора, предложим учащимся «пошагать» по графику (в режиме Trace), отмечая координаты некоторых характерных точек: пересечение графика с осями координат, точки, в которых функция принимает соответственно наибольшее и наименьшее значения.

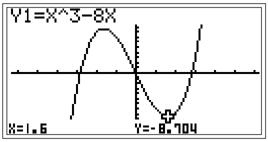
В режиме Trace:





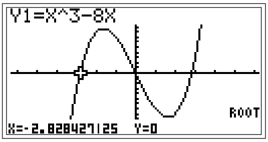


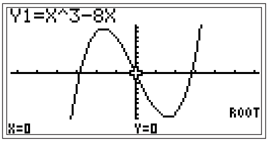


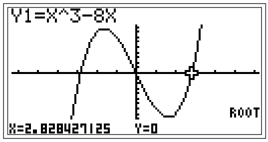


В режиме G-Solv можно определить координаты этих точек с более высокой точностью.

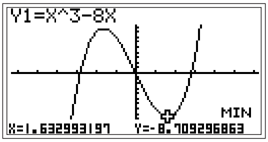
ROOT (определение точек пересечения с осью x):

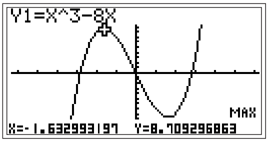




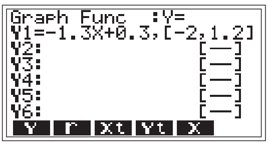


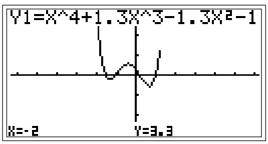
Выполняя команды MIN и MAX, калькулятор указывает так называемые «локальные экстремумы». Ни $-\infty$, ни $+\infty$ в качестве решения задачи он не предлагает.

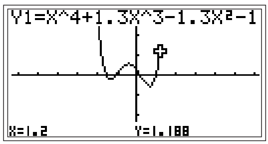




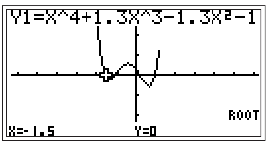
Исследуем функцию $y = x^4 + 1{,}3x^3 - 1{,}3x^2 - 1{,}3x + 0{,}3$ *на отрезке* $[-2;\ 1{,}2]$ *с калькулятором в руках (все рассуждения фиксируем в тетради в виде графика):*

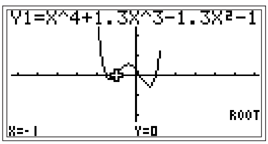


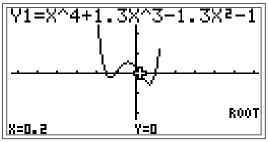


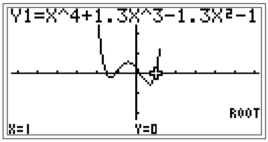


- Область определения функции: $[-2;\ 1{,}2]$.
- Корни функции найдем в режиме G-Solv (вход в режим — последовательное нажатие клавиш [SHIFT] и [F5]):



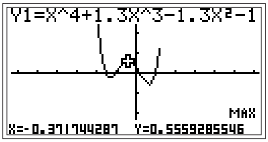


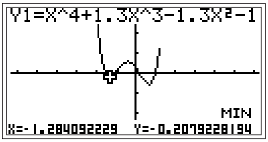


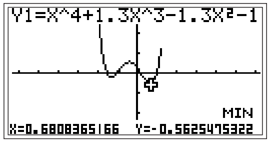


Следовательно, абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс имеют значения: –1,5; –1; 0,2; 1.

- Промежутки знакопостоянства функции:
  функция положительна на промежутках [–2; –1,5), (–1; 0,2), (1; 1,2];
  функция отрицательна на промежутках (–1,5; –1), (0,2; 1).
- Точки экстремума:







Следовательно, вблизи точки (–0,37; 0,56), а также на концах отрезка график функции имеет максимум, вблизи точек (–1,28; –0,21) и (0,68; –0,56) график функции имеет минимум.

- Промежутки монотонности функции:
  функция убывает на отрезках [–2; –1,28], [–0,37; 0,68];
  функция возрастает на отрезках [–1,28; –0,37], [0,68; 1,2].
- Наибольшее значение функция принимает в точке с абсциссой –2, оно равно 3,3; наименьшее значение функция принимает в точке с абсциссой, примерно равной 0,68, оно равно примерно –0,56.
- Область значений функции — все точки отрезка с концами, расположенными в точках с абсциссами, равными –2 и примерно 0,68, т. е. [–0,56; 3,3].

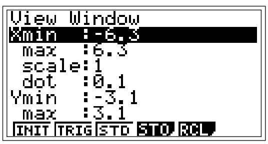
Теперь можно представить эскиз графика в тетради.

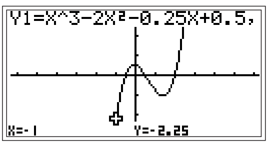
Предложим учащимся самостоятельно исследовать функции:

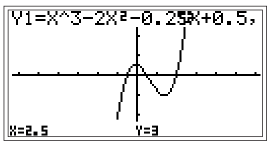
а) $y = x^3 - 2x^2 - 0{,}25x + 0{,}5$ на [–1; 2,5];
б) $y = -x^3 - 0{,}4x^2 + 2{,}25x + 0{,}9$ на [–2; 2];
в) $y = x^4 + 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 - 2x + 2$ на [–2,5; 2,5];
г) $y = -x^4 + 0{,}8x^3 + 2{,}65x^2 - 0{,}2x + 0{,}6$ на [–1,5; 2,2].

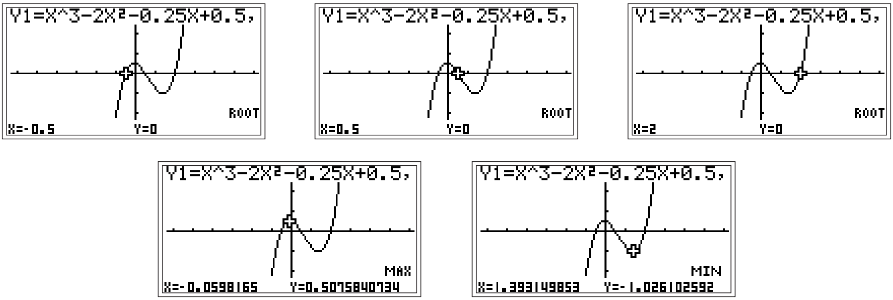
Ниже для проверки работ учащихся представим ход исследования каждого графика в виде серии картинок с экрана калькулятора.

а) Для функции $y = x^3 - 2x^2 - 0{,}25x + 0{,}5$ на [–1; 2,5] имеем:

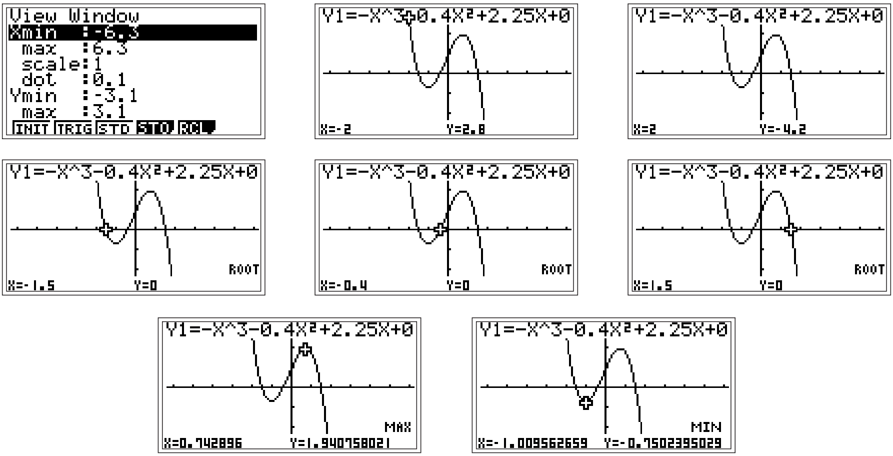




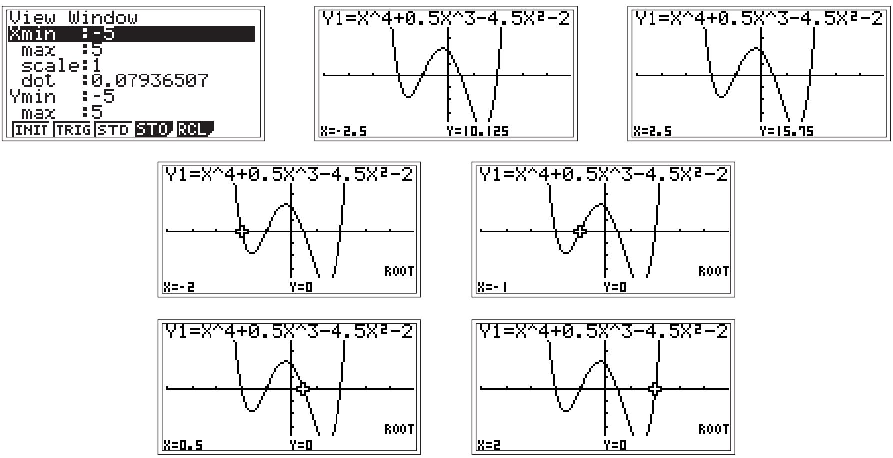


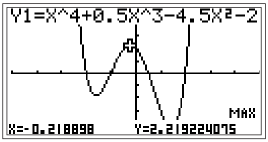


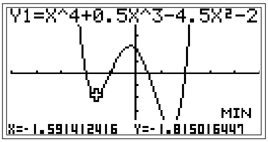
б) Для функции $y = -x^3 - 0{,}4x^2 + 2{,}25x + 0{,}9$ на $[-2;\ 2]$ имеем:

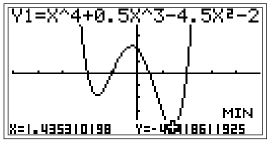


в) Для функции $y = x^4 + 0{,}5x^3 - 4{,}5x^2 - 2x + 2$ на $[-2{,}5;\ 2{,}5]$ имеем:

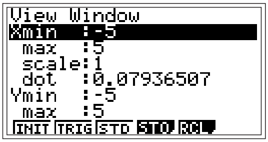


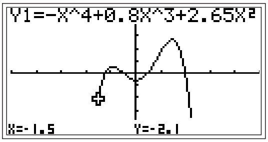


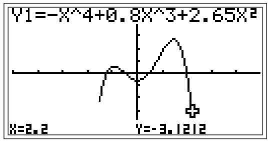


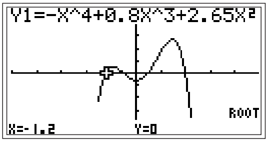


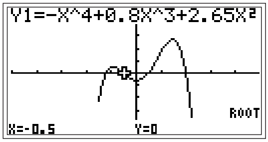
г) Для функции $y = -x^4 + 0{,}8x^3 + 2{,}65x^2 - 0{,}2x + 0{,}6$ на $[-1{,}5;\ 2{,}2]$ имеем:

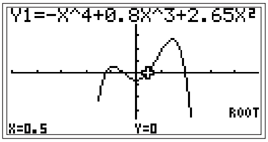


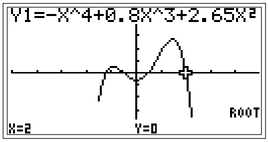


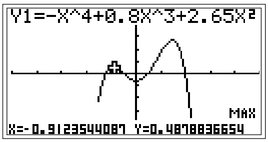


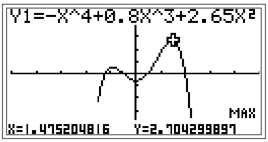


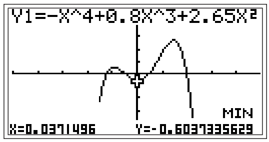












2. ТРИГОНОМЕТРИЯ

2.1. Радианная система измерения углов

Для решения практических задач важно понимание учащимися того, что длина дуги (l) окружности радиуса R пропорциональна градусной мере дуги (α). Именно эта пропорциональность положена в основу формулы длины дуги: $\frac{l}{2\pi R} = \frac{\alpha}{360}$. Отсюда $l = \frac{\pi R}{180}\alpha$. Эта формула широко используется в приложениях.

1) *На сколько градусов поворачивается Земля вокруг своей оси за* 1 *час? Какое расстояние проходит за этот час точка на экваторе Земли? (Считайте радиус Земли приближенно равным* 6380 *км).* [2, № 5.7].

Ответ: за 1 ч примерно 1670 км.

2) *Омск и Караганда находятся примерно на одном меридиане. Омск расположен на* 55° *с.ш., а Караганда — на* 49° *с.ш. Найдите расстояние между Омском и Карагандой.* [2, № 5.8].

Комментарий к решению

Градусная мера дуги Омск — Караганда равна 6°. Имеем

$$l = \frac{\pi \cdot 6380 \cdot 6}{180} = = \frac{\pi \cdot 638}{3},$$

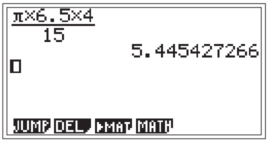
а далее с калькулятором:

Ответ: около 668 км.

3) *Колесо обозрения имеет диаметр* 13 *м. При вращении колесо поворачивается на* 12° *в каждую секунду. Колесо начинает вращаться. Какое расстояние пройдет кабина за* 4 *с?* [2, № 5.9].

Комментарий к решению

За 4 с колесо поворачивается на 48°. За это время кабина пройдет расстояние $l = \frac{\pi \cdot 6,5 \cdot 48}{180} = \frac{\pi \cdot 6,5 \cdot 4}{15}$. Выполним расчеты с калькулятором:



Ответ: примерно 5 м.

Заметим, что сущность радианного измерения часто остается непонятой учащимися вследствие того, что, как правило, в упражнениях употребляется измерение углов в долях π, а не в десятичных дробях. Это приводит к тому, что учащиеся рассматривают, например, $\frac{\pi}{2}$ как некоторое собственное имя для обозначения прямого угла и не понимают, что $\frac{\pi}{2}$ есть число радиан в прямом угле. Конечно, таблицу радианных мер некоторых важнейших углов необходимо знать на память. Но и упражнения должны быть более разнообразными, помогающими понять суть радианного измерения.

Напомним учащимся, что за новую единицу измерения углов принимается величина центрального угла окружности, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу окружности. Она называется радианом, а основанная на ней система измерения — радианной. Связь между двумя единицами измерения (градусом и радианом) выражается формулой перехода от градусной меры к радианной $x = \frac{\pi}{180}\alpha$ и обратно $\alpha = \frac{180}{\pi}x$, где α — величина угла в градусах, x — величина угла в радианах. Так, 30° — это градусная мера угла, а $\frac{\pi}{6}$ — радианная мера того же угла:

$$30 \text{ градусов — это } \frac{\pi}{6} \text{ или} \approx 0{,}5236 \text{ радиан.}$$

4) *Выразите в радианах угол* 1°, *затем угол* 100°, *а также выполните обратный перевод.*

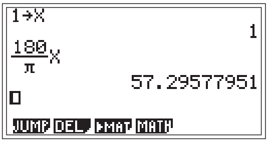
Комментарий к решению

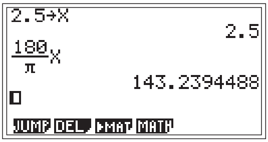
Понятно, что с калькулятором достаточно было бы выполнить лишь первую операцию — перевод в радианы, но мы продолжили действия — это усиливает наглядность и поможет запечатлеть формулы в памяти.

5) *Переведите в градусную меру угол x, равный* 1 *рад,* 2,5 *рад,* 7 *рад.*

Комментарий к решению

Воспользуемся возможностью числовой подстановки в буквенное выражение:





Желательно, чтобы учащиеся правильно соотнесли результат с геометрическим изображением каждого угла.

6) *Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 1). Ответ округлите до десятых.*

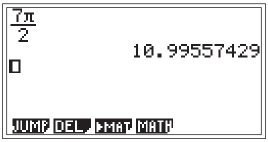
а) $R = 3$ *см,* $\alpha = 70°$*;*

б) $R = 5$ *см,* $r = 3$ *см,* $\alpha = 100°$.

Комментарий к решению

Воспользуемся формулой площади кругового сектора: $S = \frac{\alpha}{360}\pi R^2$, где R — радиус круга, α — градусная мера центрального угла, ограничивающего сектор.

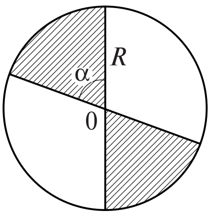
а) Имеем $S = 2\frac{70}{360}\pi 9$, а после преобразований — $S = \frac{7\pi}{2}$,



т.е. $S \approx 11{,}0$ м^2.

б) Имеем $S = \frac{100}{360}\pi R^2 - \frac{100}{360}\pi r^2$, отсюда $S = \frac{100\pi(25-9)}{360}$. Выполнив преобразования и вычисления, получим

$S \approx 14{,}0$ м^2.



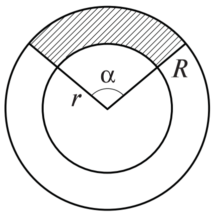
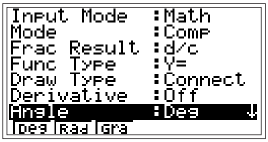


Рис. 1

2.2. Синус, косинус, тангенс, котангенс

Настроим калькулятор на работу с определенными единицами измерения углов:

– в режиме RUN-MAT откроем меню настроек SET UP и выделим строку Angle (от англ. *angle* — угол);



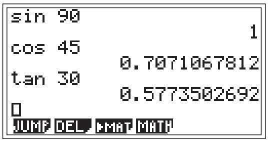
– нажмем функциональную кнопку, соответствующую той единице измерения углов, которую мы хотим задать (в нижней строке экрана калькулятора символами указаны градусы (Deg)/радианы (Rad)/грады (Gra); отметим, что 360° = 2π радиан = 400 град (в прямом угле 100 град));

– нажмем кнопку [EXIT].

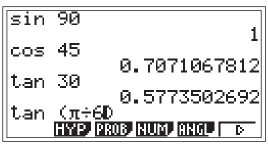
Теперь найдем значения тригонометрических функций:

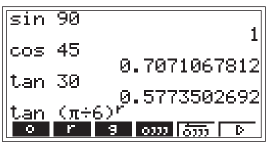
$$\sin 90°,\ \cos 45°,\ \text{tg}\,30°,\ \text{tg}\,\frac{\pi}{6}.$$

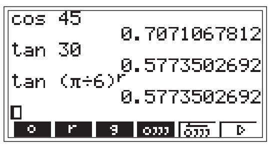
Комментарий к решению



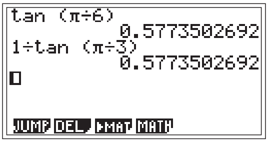
Единицу измерения угла можно изменять по ходу работы. Например, надо продолжить вычисления для углов, но заданных в радианах. Пусть надо вычислить $\text{tg}\,\frac{\pi}{6}$. Для этого войдем в подменю OPTN, по стрелке выберем ANGL и в появившемся меню функциональных клавиш выберем «o», «r» или «g» (градусы/радианы/грады) для заданной входной величины угла (в копии экрана см. нижнюю строку):







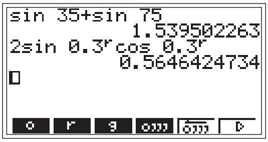
Заметим, что котангенс вычисляется с использованием клавиши [tan] (тангенс), т.к. $\text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$. Так, мы знаем, что $\text{tg}\frac{\pi}{6} = \text{ctg}\frac{\pi}{3}$. Убедимся в этом с калькулятором:

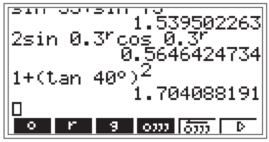


Найдем числовые значения выражений:

$$\sin 35^\circ + \sin 75^\circ;\ 2\sin 0{,}3 \cdot \cos 0{,}3;\ 1 + \mathrm{tg}^2 40^\circ.$$

Комментарий к решению



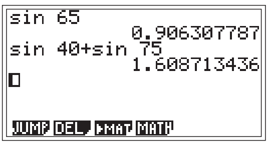


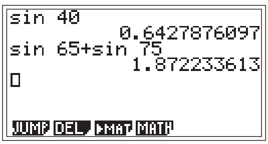
Кроме заданий на непосредственное вычисление значений тригонометрических функций включим упражнение, выполняя которое учащиеся смогут провести наблюдение, сделать вывод и доказать наблюдаемый факт.

Эксперимент. Подгруппам учащихся предложим взять несколько произвольных треугольников, найти их углы и рассмотреть соотношения между синусами углов каждого треугольника. Скорее всего, учащиеся догадаются, что, выбрав произвольный треугольник и определив его углы, можно подметить соотношение между значением синуса одного его угла и суммой синусов двух других его углов.

Пусть, например, $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 75^\circ$.

Можно сначала вычислить синус одного угла, затем сумму синусов других углов, сравнить их значения и сделать вывод:





Вывод: в треугольнике с углами $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 40^\circ$, $\gamma = 75^\circ$ выполнены неравенства:

$$\sin 65^\circ < \sin 40^\circ + \sin 75^\circ;$$

$$\sin 40^\circ < \sin 65^\circ + \sin 75^\circ;$$

$$\sin 75^\circ < \sin 65^\circ + \sin 40^\circ.$$

Наблюдаемый факт: в любом треугольнике *ABC* с углами α, β, γ выполняется неравенство

$$\sin\alpha < \sin\beta + \sin\gamma.$$

Доказательство. Пусть a, b, c — стороны треугольника, лежащие соответственно против углов α, β, γ. Если умножить обе части доказываемого неравенства на $\frac{1}{2}abc$, то получим равносильное неравенство:

$$\frac{1}{2}abc\cdot\sin\alpha < \frac{1}{2}abc\cdot\sin\beta + \frac{1}{2}abc\cdot\sin\gamma.$$

Так как площадь (S) треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, то $S = \frac{1}{2}bc\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$. Теперь можно переписать неравенство в виде $Sa < Sb + Sc$. Разделив обе его части на S, заметим, что доказываемое неравенство равносильно неравенству $a < b + c$, то есть неравенству треугольника, а потому — истинно.

2.3. Графики тригонометрических функций

1. При построении графика функции **синус** будем опираться на уже известные учащимся сведения о синусе действительного числа. Поэтому сразу отметим, что по определению функции синус каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное синусу угла в x радиан и что у функции $y = \sin x$:

– область определения есть множество всех действительных чисел;

– область значений есть отрезок $[-1; 1]$;

– функция периодическая с главным периодом 2π, т.к. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$;

– функция нечетная, т.к. $\sin(-x) = -\sin x$.

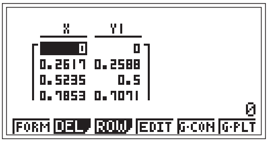
Поэтому сначала можно построить график на отрезке $[0, 2\pi]$, а потом продолжить его, сдвигая построенную кривую вдоль оси абсцисс вправо и влево на $2k\pi$, $k \in Z$.

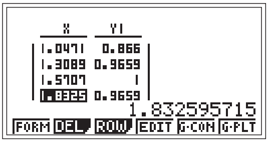
Можно поступить иначе: данная функция нечетная, поэтому достаточно построить часть графика только для полупериода $[0, \pi]$, затем построить ей симметричную относительно начала координат, а после этого получившуюся для периода $[-\pi, \pi]$ кривую повторить несколько раз.

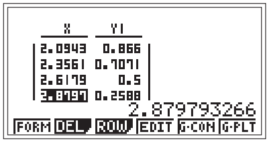
Выполним построение графика $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Для построения графика функции $y = \sin x$ надо для каждого x вычислить соответствующее значение $y = \sin x$ и точки $(x; y)$ отметить на координатной плоскости. Совокупность этих точек образует график функции $y = \sin x$. Однако эту работу для всех точек выполнить невозможно, т.к. таких точек бесконечно много. Поэтому график мы будем строить приближенно, используя свойства функции и ее значения для некоторых x, принадлежащих отрезку $[0, \pi]$.

Если использовать шаг $\frac{\pi}{12}$, то в табличном режиме работы калькулятора (TABLE) получим тринадцать точек, принадлежащих графику (отметим, что предварительно необходимо проверить в меню SET UP, что в качестве угловой меры заданы радианы):

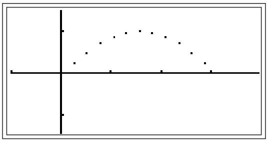




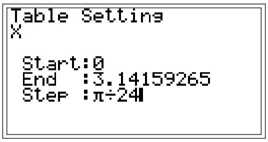


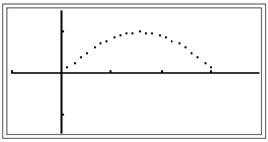
Изобразим примерное расположение всех тринадцати точек на координатной плоскости, округляя значения координат до сотых (построим систему координат на листе в клетку, взяв 10 клеток за единичный отрезок): (0; 0), (0,26; 0,26), (0,52; 0,5), (0,79; 0,71), (1,05; 0,87), (1,31; 0,97), (1,57; 1), (1,83; 0,97), (2,09; 0,87) (2,36; 0,71), (2,62; 0,5), (2,88; 0,26), (3,14; 0).

На экране графического калькулятора воспроизведем процесс построения тринадцати точек рассматриваемого графика.



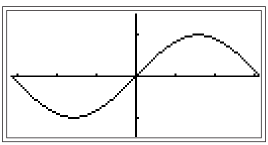
Усилим наглядность, уменьшив вдвое рассматриваемый шаг изменения угла:





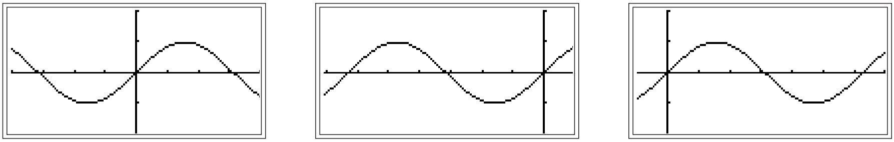
Учитывая, что на рассматриваемом отрезке функция $y = \sin x$ непрерывна, соединим отмеченные на нашем рисунке точки непрерывной линией. Полученную кривую можно рассматривать как приближенный график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$.

Чтобы продолжить построение синусоиды, воспользуемся рассуждениями, приведенными в начале этого пункта. Сравним изображение с выведенным на экран калькулятора:

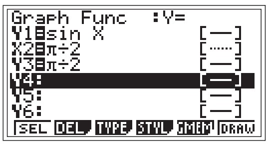


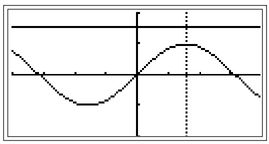
Выразим словами Г.В. Дорофеева следующую немаловажную мысль: «Построение графиков «по точкам» — это вовсе не примитивная деятельность, определенная недостаточными знаниями ученика, но вполне полноценная эвристическая деятельность, дающая человеку значительно больше в отношении общеинтеллектуального и математического развития, чем применение стандартных алгоритмов математического анализа». Этой же точки зрения мы будем придерживаться в дальнейших графических построениях.

Воспользуемся калькулятором и предложим учащимся «пошагать» по синусоиде. Обратим внимание на то, что первоначально на экране мы видим часть синусоиды, но, сдвигая плоскость вправо или влево, можем увидеть ее продолжение:



Зададим вопросы. Например, такой: относительно какой прямой симметричен график функции $y = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$? Ответ проверим с помощью калькулятора: какой ответ верный (пунктирной линией показан ответ Коли: $x = \dfrac{\pi}{2}$, тонкой линией — ответ Лены: $y = \dfrac{\pi}{2}$)?





Определим промежутки возрастания (убывания) функции на отрезке $[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}]$. Укажем промежутки, на которых функция $y = \sin x$ принимает положительные (неположительные) значения на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$. Определим, сколько точек пересечения имеет график функции $y = \sin x$ с прямой $y = \dfrac{1}{2}$ на заданном отрезке, например $[0, 5\pi]$. (Ответы прокомментируем с помощью калькулятора.)

2. Полезно воспользоваться некоторыми приемами для построения разнообразных графиков, базируясь на построении синусоиды.

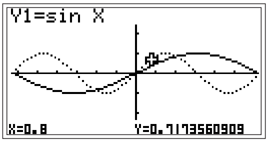
1) Рассмотрим растяжение (или сжатие) графика функции $y = \sin x$ в данном отношении вдоль оси абсцисс.

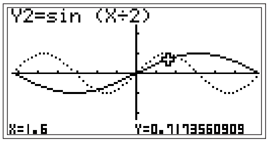
Если, к примеру, известен график функции $y = \sin x$, то как построить график функции $y = \sin\dfrac{x}{2}$?

Учащимся, незнакомым с построением подобных графиков, предложим следующие рассуждения.

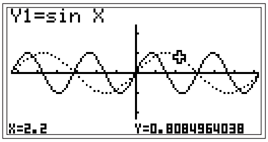
Чтобы получить одинаковые значения обеих функций, надо придать аргументу x функции $y = \sin\frac{x}{2}$ значения в два раза большие, чем у функции $y = \sin x$. Следовательно, чтобы построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$ надо переместить точки графика $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс на такое расстояние, чтобы абсциссы их стали в два раза больше.

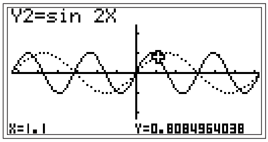
Покажем сначала в тетради примерное расположение графиков $y = \sin x$ и $y = \sin\frac{x}{2}$, а потом убедимся в правильности эскиза с помощью калькулятора (обратим внимание на показания нижней строки на экране калькулятора).





А чтобы построить график функции $y = \sin 2x$, зная график функции $y = \sin x$, перемещают точки графика $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс так, чтобы абсциссы этих точек стали в два раза меньше, т. е. сжимают график функции $y = \sin x$ вдоль оси абсцисс в два раза:

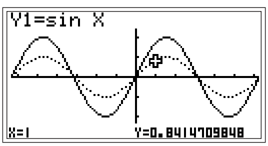


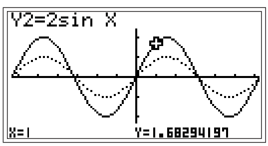


2) Рассмотрим растяжение (или сжатие) графика в данном отношении вдоль оси ординат.

Построим график функции $y = 2\sin x$. При одних и тех же значениях x значения функции $y = 2\sin x$ в два раза больше значений функции $y = \sin x$. Следовательно, для построения данного графика достаточно увеличить все ординаты функции $y = \sin x$ в два раза, т. е. произвести растяжение графика $y = \sin x$ в два раза вдоль оси ординат.

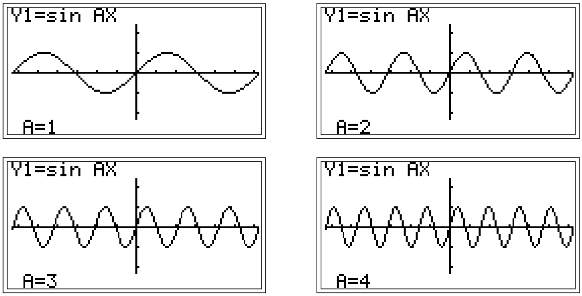
Покажем в тетради примерное расположение графиков и убедимся в правильности эскиза с помощью калькулятора (обратим внимание на показания нижней строки на экране калькулятора).



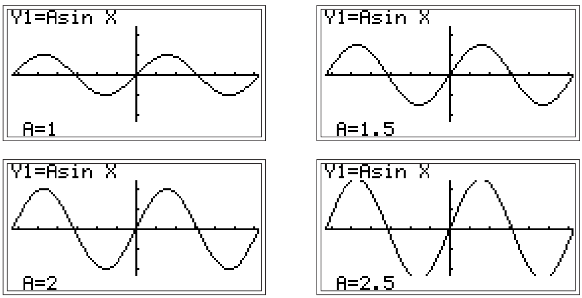


Наш совет: чтобы усилить наглядность данных преобразований, воспользуйтесь динамическим режимом (DYNA); в нем перед учащимися возникнут сменяющие друг друга графики, вид которых зависит от изменяющегося значения коэффициента *A*. Например, такие:

для $y = \sin Ax$ при изменении *A* от 1 до 4 с шагом 1 имеем:

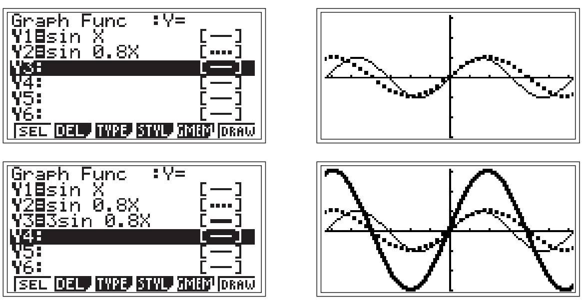


для $y = A\sin x$ при изменении *A* от 1 до 2,5 с шагом 0,5 имеем:



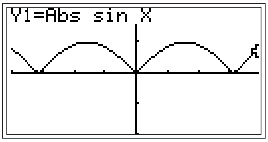
3) Рассмотрим теперь построение графика функции, при котором потребуется одновременное растяжение (или сжатие) графика функции $y = \sin x$ вдоль осей координат.

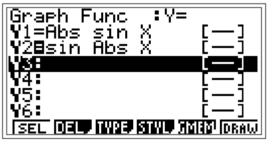
Построим, например, график функции $y = 3\sin 0{,}8x$: строим сначала график $y = \sin x$ и растягиваем его вдоль оси абсцисс (увеличиваем все абсциссы в 1,25 раза, т. к. $1:0{,}8 = 1{,}25$) — получаем график $y = \sin 0{,}8x$; затем производим растяжение построенного графика вдоль оси ординат в 3 раза. Все операции выполняем в тетради и контролируем себя с помощью калькулятора:

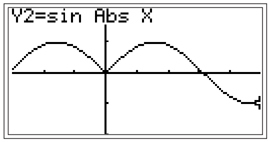


4) В упражнения рекомендуем включить задания на построение графиков функций $y = |\sin x|$, $y = \sin|x|$.

Сначала наметим в тетради примерное изображение графика, а затем для проверки получим изображение на калькуляторе (напомним, как вывести на экран знак модуля: [OPTN], [F5] (NUM), [F1] (Abs)):







3. По определению функции **косинус** каждому действительному числу x поставлено в соответствие число y, равное косинусу угла в x радиан. Учащимся уже известны некоторые свойства косинуса действительного числа, поэтому сразу отметим, что у функции $y = \cos x$:

– область определения есть множество всех действительных чисел;

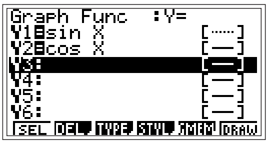
– область значений есть отрезок $[-1;\ 1]$;

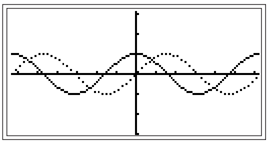
– функция периодическая с главным периодом 2π, т. к. $\cos(x+2\pi) = \cos x$;

– функция четная, т. к. $\cos(-x) = \cos x$.

Напомним также, что $\cos x = \sin\ x+\dfrac{\pi}{2}$.

Все это говорит о том, что график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние $\dfrac{\pi}{2}$ в отрицательном направлении оси абсцисс.





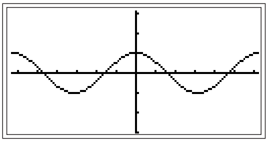
Воспользуемся калькулятором и предложим учащимся «пошагать» по косинусоиде:

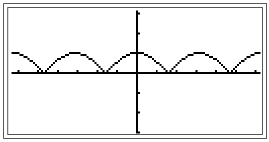
1) Определим промежутки возрастания (убывания) функции $y = \cos x$ на отрезке $[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{2}]$.

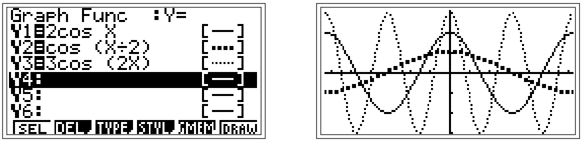
2) Укажем промежутки, на которых функция $y = \cos x$ принимает положительные (неположительные) значения на отрезке $[-2\pi,\ 2\pi]$.

Выполним построение графиков функций $y = \cos|x|$ и $y = |\cos x|$, а затем графиков функций $y = 2\cos x$, $y = \cos\dfrac{x}{2}$, $y = 3\cos 2x$ сначала в тетради, а затем на калькуляторе:

$y = \cos|x|$: $y = |\cos x|$:

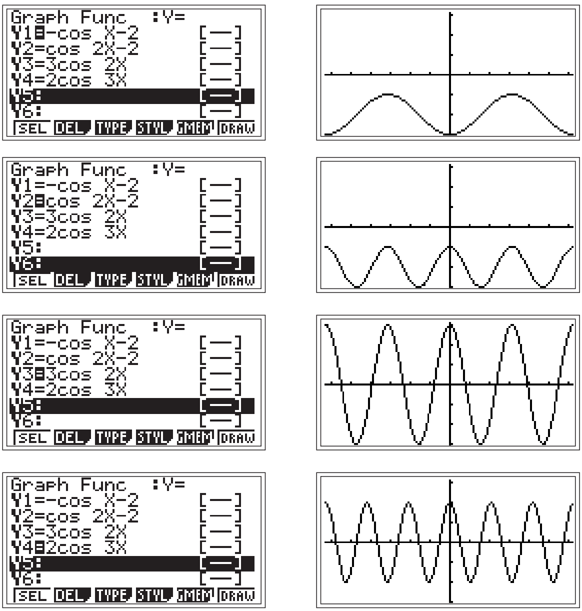






При использовании калькулятора целесообразно предложить учащимся упражнения на установление соответствия между функциями и графиками, изображенными на экране. В постановке задачи используем кодоскоп.

К примеру, требуется установить соответствие между функциями из списка: а) $y = \cos 2x - 2$; б) $y = 3\cos 2x$; в) $y = -\cos x - 2$; г) $y = 2\cos 3x$ — и графиками, выводимыми на экран:

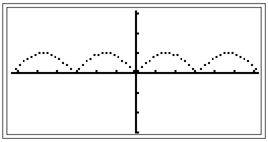
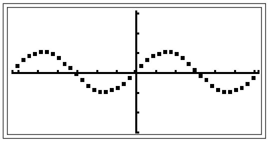


4. С помощью арифметических действий можно на основе данных функций сконструировать новые функции и построить их графики. В упражнения рекомендуем включить построение графиков приведенных ниже функций.

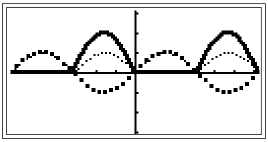
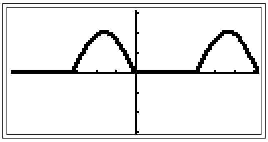
1) $y = |\sin x| - \sin x$.

Очевидно, что:

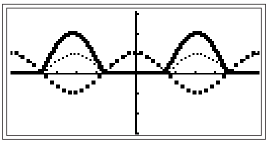
$y = |\sin x|$: $\quad$ $y = \sin x$:

На листе в клетку нарисуем оси координат, и в одной и той же системе координат изобразим два графика: $y = |\sin x|$ и $y = \sin x$. Теперь легко определить примерное расположение графика $y = |\sin x| - \sin x$. Для проверки сравним эскиз с изображением, полученным на калькуляторе:

 или 

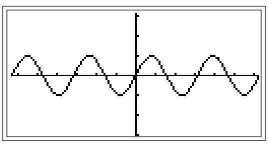
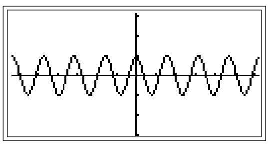
В самостоятельной работе предложим построить график функции $y = |\cos x| - \cos x$:

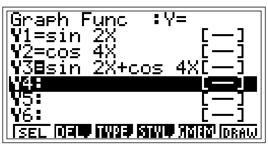


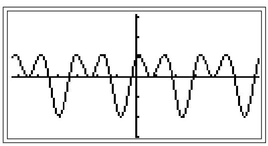
2) $y = \sin 2x + \cos 4x$.

Графики функций $y = \sin 2x$ и $y = \cos 4x$ построим сжатием по оси абсцисс соответственно графиков $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Как и прежде сначала построим графики схематически, а потом проверим свое предположение на калькуляторе. Имеем:

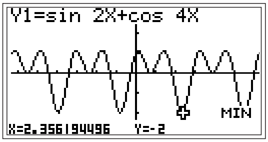
$y = \sin 2x$: $\quad$ $y = \cos 4x$:



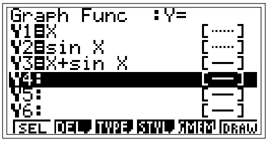


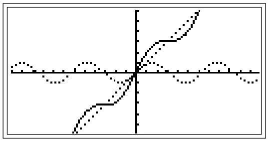
Не оставим без внимания свойства функции $y = \sin 2x + \cos 4x$ и зададим вопросы, на которые можно ответить, пользуясь графиком. Можно ли назвать функцию периодической? Если да, то какой у нее период? Каково наименьшее значение функции на отрезке $[0, \pi]$?



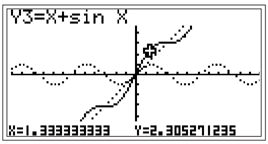
3) $y = x + \sin x$.

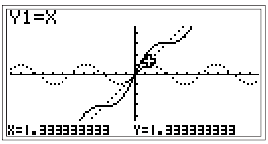
При построении графика в тетради будем помнить, что данная функция есть сумма двух непрерывных функций, поэтому ее график представляет собой непрерывную линию. Построим в одной и той же координатной плоскости графики функций $y = x$ и $y = \sin x$, затем сложением ординат определим примерное расположение точек нового графика, обратив особое внимание на точки пересечения биссектрисы $y = x$ с новой кривой. А потом проверим свое предположение на калькуляторе:

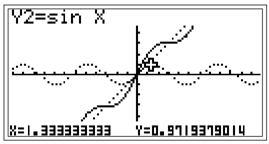




Для наглядности выберем на графике функции $y = x + \sin x$ точку с какой-нибудь абсциссой, скажем равной 1,333..., и посмотрим, из чего «сложилась» ее ордината:

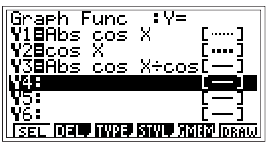


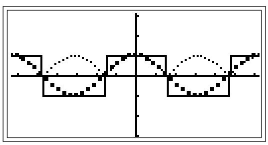




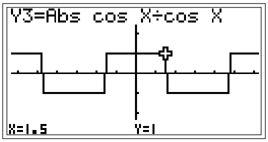
4) $y = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$.

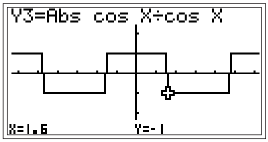
Как и прежде сначала построим графики функций $y = |\cos x|$ и $y = \cos x$. Понятно, что искомый график будет иметь точки разрыва. Наметим в тетради точки прерывной линии для данного графика, а затем рассмотрим график на калькуляторе:



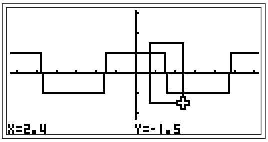


В точках с абсциссами, равными $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in Z,$ функция имеет разрывы, и это хорошо видно на экране калькулятора (видим, как выполняется скачок):

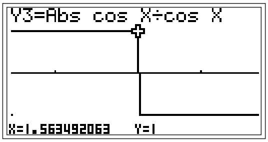


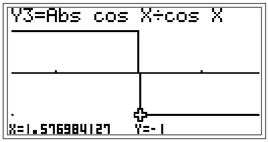


Далее используем режим увеличения выделенной области BOX:



и явно увидим, например:

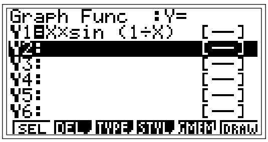


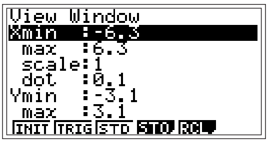


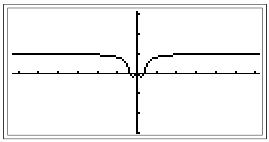
что первая справа от начала координат точка разрыва имеет абсциссу между значениями 1,56 и 1,58 (и действительно, в точке $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5707963...$ функция имеет разрыв).

5) Рекомендуем продемонстрировать поведение функции $y = x\sin\frac{1}{x}$ вблизи нуля.

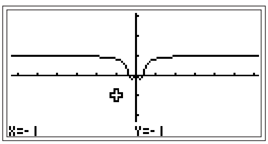
Имеем:

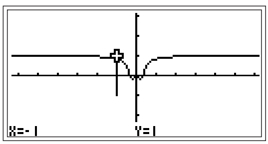


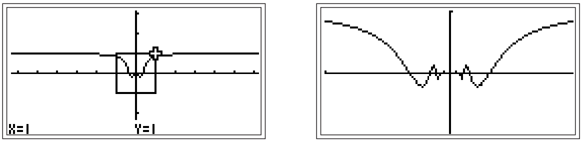




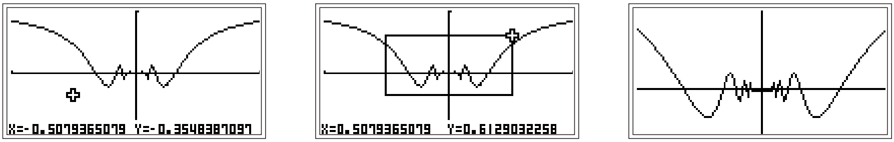
Используя режим BOX, получим:



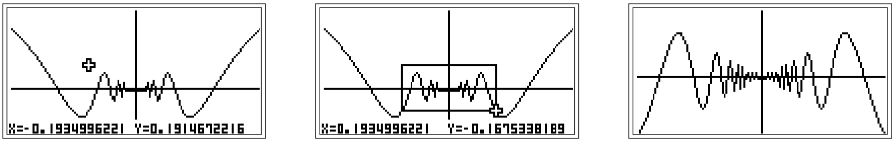




Еще раз:

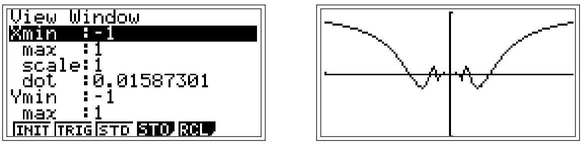


И еще раз:

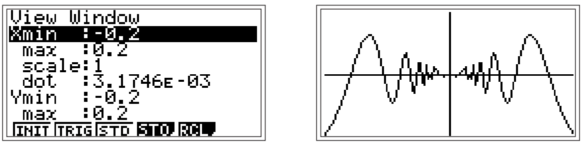


Можно уточнить поведение функции $y = x\sin\frac{1}{x}$ иначе.

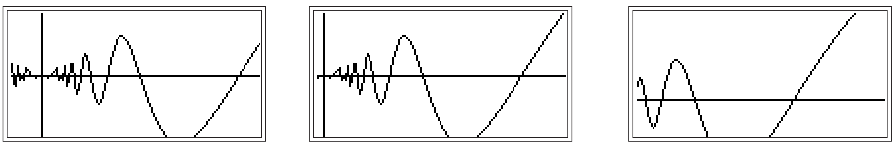
Сначала зададим параметры окна вывода графика так:



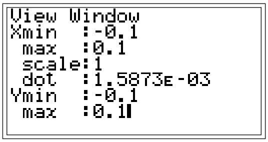
а затем увеличим масштаб так:

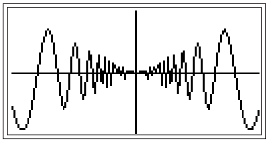


Посмотрим на поведение графика правее оси y:

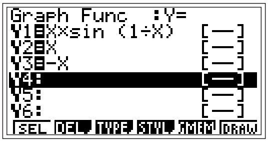


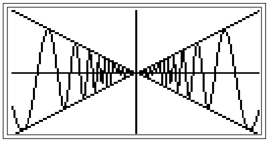
И снова вернемся к рассмотрению графика вблизи нуля, уточнив границы окна построения графиков:





Заметим, что весь график расположен между прямыми $y = x$ и $y = -x$.





5. По определению функции **тангенс** каждому действительному числу x, отличному от $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число, поставлено в соответствие число y, равное тангенсу угла в x радиан. Учащимся уже известны некоторые свойства тангенса действительного числа, поэтому сразу отметим, что у функции $y = \operatorname{tg} x$:

– область определения есть множество всех действительных чисел x, отличных от $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число;

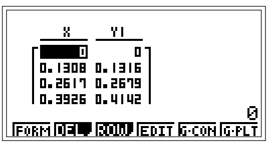
– область значений есть интервал $(-\infty; +\infty)$;

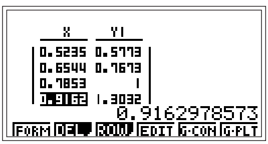
– функция периодическая с главным периодом π;

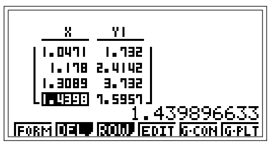
– функция нечетная.

Сначала ограничимся построением графика на полуинтервале $[0, \dfrac{\pi}{2})$. Напомним, что чем ближе x к $\dfrac{\pi}{2}$, тем ближе знаменатель дроби — $\cos x$ — к 0, и тем больше значение $\operatorname{tg} x$. График будем строить приближенно, используя свойства функции и ее значения для некоторых x, принадлежащих полуинтервалу $[0, \dfrac{\pi}{2})$.

Если использовать шаг $\dfrac{\pi}{24}$, то на интервале $[0, \dfrac{11\pi}{24}]$ получим 12 точек, принадлежащих графику:

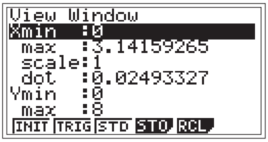


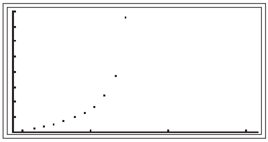




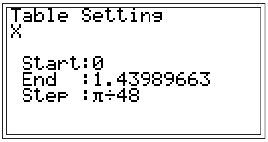
Округляя значения координат до сотых, построим все двенадцать полученных точек на координатной плоскости: (0; 0), (0,13; 0,13), (0,26; 0,27), (0,39; 0,41), (0,52; 0,58), (0,65; 0,77), (0,79; 1), (0,92; 1,30), (1,05; 1,73), (1,18; 2,41), (1,31; 3,73), (1,44; 7,60).

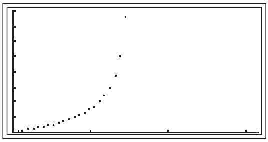
На экране графического калькулятора можно воспроизвести результат построения двенадцати точек рассматриваемого графика:



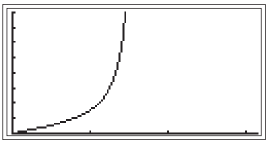


Усилим наглядность, уменьшив вдвое шаг построения точек:





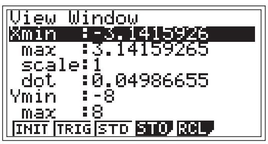
Выполним построение графика $y = \operatorname{tg} x$. Учитывая, что на полуинтервале $[0, \frac{\pi}{2})$ функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывно возрастает от 0 до $+\infty$, соединим отмеченные на нашем рисунке точки непрерывной линией. Полученную кривую можно рассматривать как приближенный график функции $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $[0, \frac{\pi}{2})$.

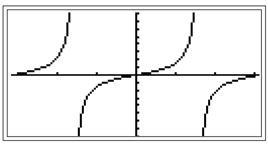


Чтобы продолжить построение тангенсоиды, воспользуемся свойствами функции $y = \operatorname{tg} x$.

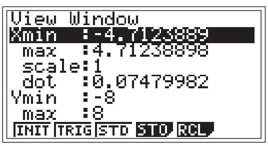
Покажем, как выглядит тангенсоида на экране калькулятора (режим GRAPH).

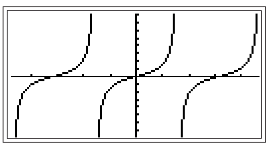
Зададим границы окна построения графиков так:



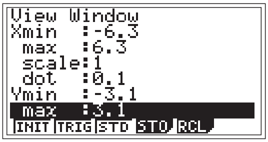


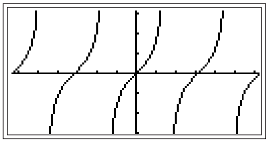
или так:



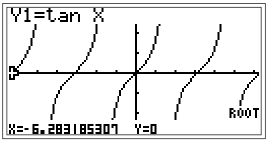


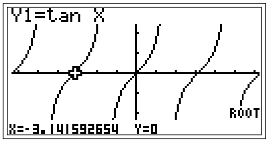
а более наглядное изображение получим при стандартных (INIT) параметрах окна вывода графиков:

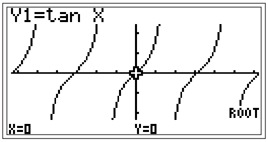


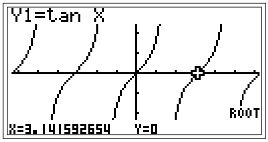


Выбрав в меню G-Solv функцию ROOT, можно рассмотреть координаты точек пересечения тангенсоиды с осью абсцисс:

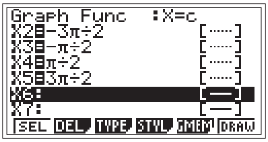


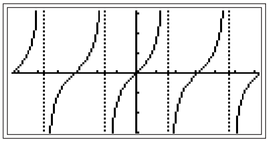






То, что функция $y = \text{tg}x$ возрастает на каждом из промежутков $(-\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in Z$, не касаясь их границ, станет нагляднее, если провести соответствующие вертикали (не забудем в подменю TYPE заменить тип графика Y = на X = c):





6. По определению функции **котангенс** каждому действительному числу x, отличному от $x = k\pi$, где k — любое целое число, поставлено в соответствие число y, равное котангенсу угла в x радиан. Учащимся уже известны некоторые свойства котангенса действительного числа, поэтому сразу отметим, что у функции $y = \text{ctg}x$:

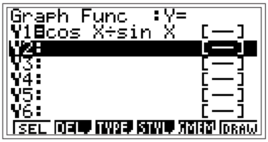
– область определения есть множество всех действительных чисел x, отличных от $x = k\pi$, где k — любое целое число;

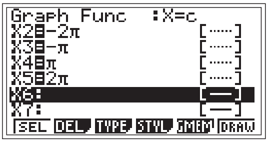
– область значений есть интервал $(-\infty; +\infty)$;

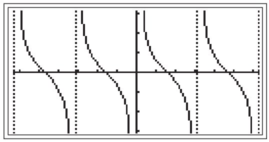
– функция периодическая с главным периодом π;

– функция нечетная.

График функции $y = \text{ctg}x$ можно получить из графика функции $y = \text{tg}x$. Для этого надо перенести его вправо на $\frac{\pi}{2}$, а затем отобразить симметрично относительно оси абсцисс. Выполненные в тетради построения сопоставим с графиком, полученным на калькуляторе:

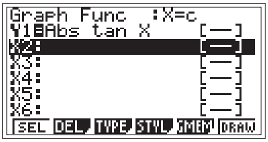


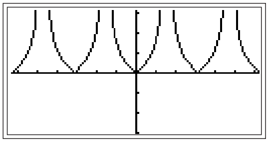




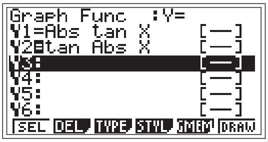
7. Как и прежде графики предлагаемых функций изобразим сначала в тетради, а затем сравним каждый эскиз с графиком, построенным с использованием калькулятора.

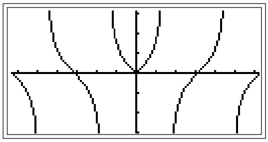
а) $y = |\mathrm{tg}\, x|$:



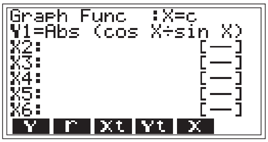


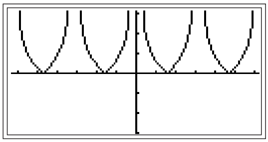
б) $y = \mathrm{tg}|x|$:



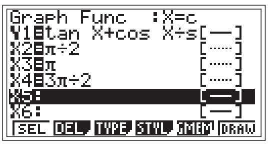


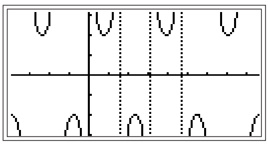
в) $y = |\mathrm{ctg}\, x|$:





г) $y = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, x$:

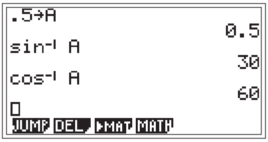


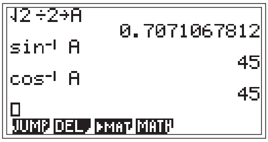


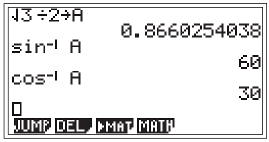
8. Учащиеся уже знают, что **арксинус числа *a*** ($|a| \le 1$) есть угол α из промежутка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен a; а также что **арккосинус числа *a*** ($|a| \le 1$) есть угол α из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a. На клавиатуре калькулятора arcsin обозначен в виде $\sin^{-1}$, а arccos — в виде $\cos^{-1}$.

Для знакомых значений синуса и косинуса вычислим соответствующие значения арксинуса и арккосинуса.

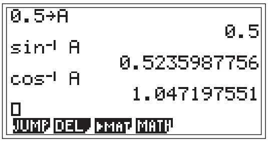
Задав в меню настроек SET UP в качестве угловых единиц градусы, получим:

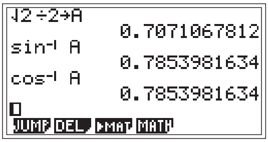


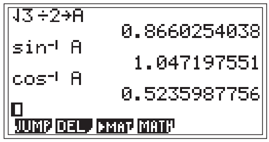




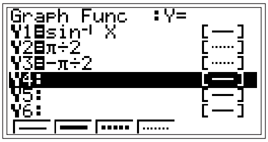
Задав в меню настроек SET UP в качестве угловых единиц радианы, получим:

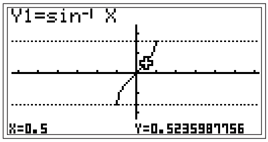


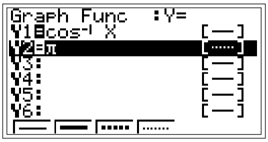


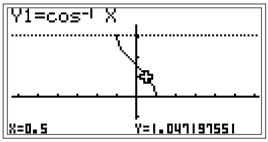


Сравним изображения графиков функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ в тетради и на экране калькулятора:





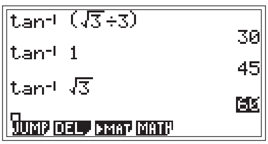




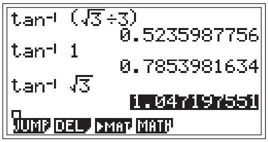
Учащимся известно, что **арктангенс числа *a*** есть угол α из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, тангенс которого равен a. На клавиатуре калькулятора arctg обозначен в виде $\tan^{-1}$.

Для знакомых значений тангенса вычислим соответствующие значения арктангенса.

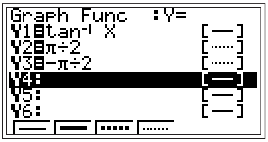
Задав в меню настроек SET UP в качестве угловых единиц градусы, получим:

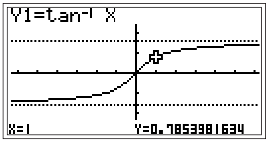


Задав в меню настроек SET UP в качестве угловых единиц радианы, получим:



Сравним изображения графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ в тетради и на экране калькулятора:





2.4. Тригонометрические уравнения

1. Подчеркнем, что каждое тригонометрическое уравнение после преобразований, в конечном итоге, сводится к одному из четырех простейших уравнений:

$$\cos x = a,\ \sin x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

Как описать все решения простейших уравнений? Рекомендуем итог рассуждений, приведенных в учебнике «Алгебра и начала анализа» для каждого из таких уравнений, представить в виде таблиц.

$\sin x = a$

$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
нет решений	$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = (-1)^n \cdot \arcsin a +$ $+ \pi n,\ n \in Z$	$x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	нет решений

$\cos x = a$

$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
нет решений	$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\arccos a +$ $+ 2\pi n,\ n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$	нет решений

$\operatorname{tg} x = a$

$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
$x = \operatorname{arctg} a +$ $+ \pi n,\ n \in Z$	$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \operatorname{arctg} a +$ $+ \pi n,\ n \in Z$

$\operatorname{ctg} x = a$

$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a > 1$
$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$	$x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$	$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$

2. Во многих случаях решение тригонометрических уравнений сводится к решению основных алгебраических уравнений после выполнения некоторых алгебраических действий.

Если, например, имеется уравнение, левая часть которого содержит x только под знаком одной и той же тригонометрической функции, то задача распадается на две:

- решение алгебраического уравнения относительно новой неизвестной, например, $t = \cos x$ и т. п., — его можно перепоручить калькулятору;
- решение простейшего тригонометрического уравнения — его можно сверить с таблицей.

1) Решим уравнение $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

Комментарий к решению

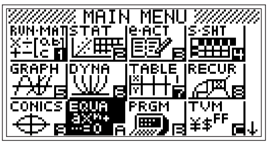
Выразив $\sin^2 x$ через $1 - \cos^2 x$, придем к уравнению

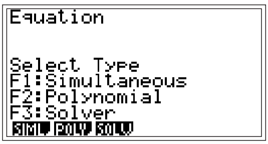
$$4\cos^2 x + 4\cos x - 3 = 0.$$

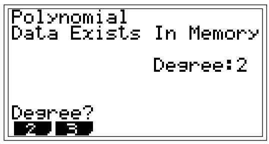
Сделаем замену ($\cos x = t$) и решим квадратное уравнение

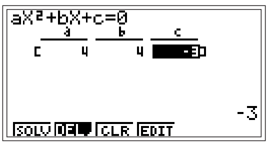
$$4t^2 + 4t - 3 = 0,$$

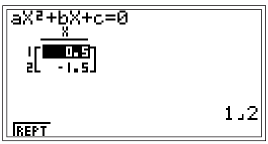
используя режим решения уравнений EQUA калькулятора:











Получим $\cos x = 0{,}5$ и $\cos x = -1{,}5$. Второе из этих уравнений не имеет решений.

Мы получим одну серию решений данного уравнения:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

2) Предложим учащимся для самостоятельного решения уравнение

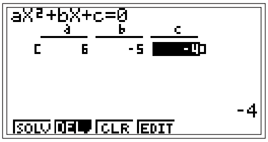
$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$$

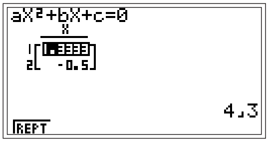
Комментарий к решению

Выразив $\cos^2 x$ через $1 - \sin^2 x$, придем к уравнению

$$6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0.$$

Сделав замену ($\sin x = t$) и решив квадратное уравнение, получим:





То есть $\sin x = 1,(3)$, $\sin x = -0,5$. Первое уравнение не имеет решений.

Мы получим одну серию решений данного уравнения:

$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

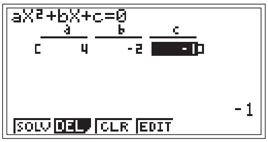
3) Решим уравнение $4\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$.

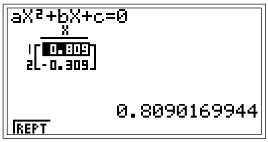
Комментарий к решению

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим

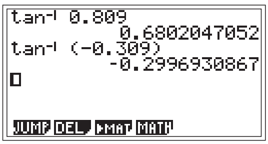
$$4\,\mathrm{tg}^2 x - 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0.$$

Сделаем замену и решим квадратное уравнение:





Найдем с помощью калькулятора приближенные значения арктангенса:



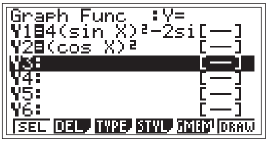
Запишем две серии решения, округлив полученные значения до десятых:

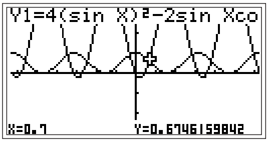
$$x \approx 0,7 + \pi n,\ n \in Z \quad \text{и} \quad x \approx -0,3 + \pi n,\ n \in Z.$$

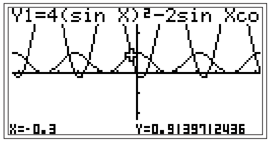
Сравним наше решение с графическим, представив рассматриваемое уравнение в виде

$$4\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = \cos^2 x$$

и построив с помощью калькулятора два графика в одной и той же системе координат:







«Шагая» по точкам пересечения графиков, получим те же приближенные решения.

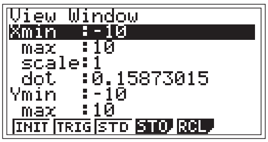
3. ПРОИЗВОДНАЯ

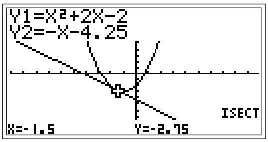
3.1. Касательная к графику функции

Понятие производной, как и многие другие определения математики, усваивается гораздо легче, если с самого начала изучения оно связано с некоторой моделью. Такой моделью может быть «наклон» графика функции (угловой коэффициент касательной к графику) в данной точке.

1. Подчеркнем важный факт: построение касательных к графику в отдельных его точках позволяет уточнять эскизы графиков функций.

Возьмем, к примеру, параболу $y = x^2 + 2x - 2$ и построим касательную к ней в какой-нибудь точке x_0. Для этого найдем производную $y' = 2x + 2$ и запишем уравнение касательной в точке $x_0 = -1{,}5$: $y = -x - 4{,}25$. Выполним соответствующие построения в графическом режиме работы калькулятора:





А теперь посмотрим в динамическом режиме работы графического калькулятора, как «подобные» касательные ограничивают нашу параболу.

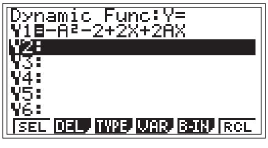
Для этого запишем уравнение касательной в общем виде, указывая координаты точки касания параметрически, например в виде $x_0 = A$. Имеем:

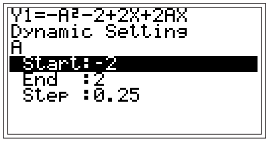
$$y = (A^2 + 2A - 2) + (2A + 2)(x - A).$$

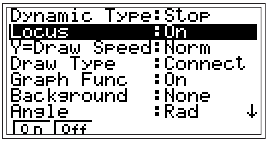
Упростив правую часть, получим:

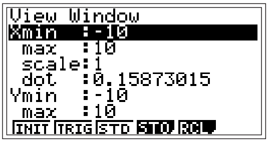
$$y = -A^2 - 2 + 2x + 2Ax.$$

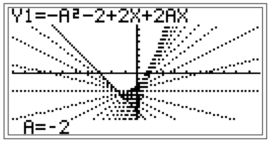
Придавая параметру A желаемые нам значения, получим совокупность прямых — касательных к нашей параболе (используем функцию Locus, позволяющую оставлять на экране след предыдущего изображения):









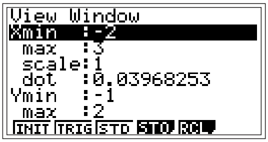


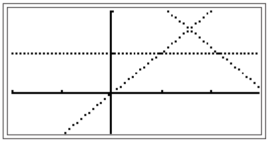
Другой пример. В учебнике [1, с. 130] показано, как для построения эскиза графика функции синус предварительно находят производные синуса в точках 0; $\frac{\pi}{2}$ и π и строят прямые, проходящие через точки (0; 0), ($\frac{\pi}{2}$; 1), (π; 0) с угловыми коэффициентами 1, 0 и –1.

Понятно, что эти прямые — касательные к графику. Они заданы уравнениями

$$y = x, \quad y = 1 \quad \text{и} \quad y = -x + \pi$$

и ограничивают (в виде трапеции) график синуса на рассматриваемом промежутке:

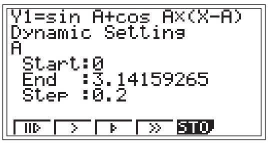


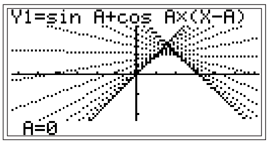


Мы можем задать уравнением касательную к графику синуса, проходящую через точку с абсциссой A, в общем виде как

$$y = \sin A + (x - A)\cos A$$

и рассмотреть ее поведение при изменении A от 0 до π:



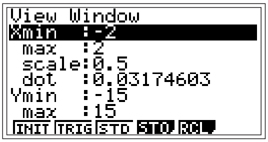


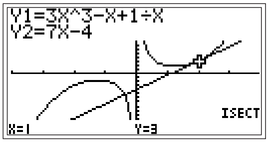
2. Рассмотрим ряд заданий, которые встречаются среди упражнений на поиск уравнения касательной к графику функции при заданных условиях.

1) *Найдите уравнение касательной к графику функции* $y = 3x^3 - x + \frac{1}{x}$ *в точке с абсциссой* 1.

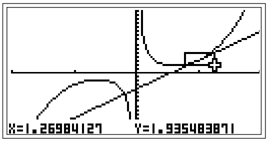
Комментарий к решению

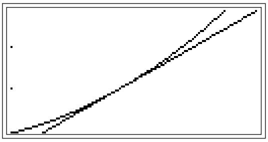
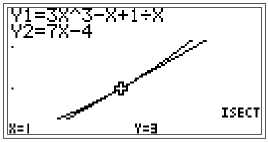
Выполнив соответствующие выкладки, получим $y = 3 + 7(x - 1)$, т.е. уравнение касательной в виде $y = 7x - 4$. Калькулятор подтверждает наше решение:





Используя функцию BOX, рассмотрим место касания:

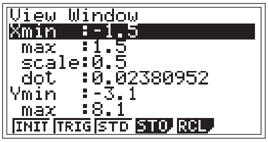


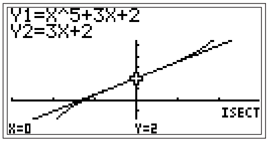



2) *Найдите уравнение касательной к графику функции* $y = x^5 + 3x + 2$ *в точке с ординатой* 2.

Комментарий к решению

Понятно, что речь идет о точке (0; 2) и касательной $y = 3x + 2$.





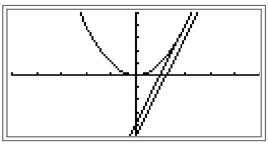
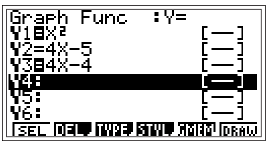
3) *Определите, в каких точках касательная к параболе* $y = x^2$:

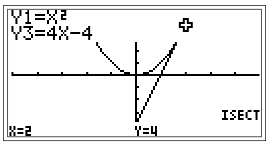
а) *параллельна прямой* $y = 4x - 5$;

б) *перпендикулярна прямой* $2x - 6y + 5 = 0$.

Комментарий к решению

а) Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент нашей касательной равен 4, но $y' = 2x$, т.е. абсцисса точки касания равна 2, следовательно, имеем уравнение касательной $y = 4 + 4(x - 2)$, т.е. $y = 4x - 4$.

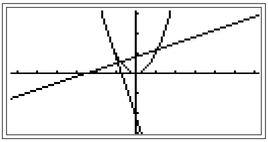
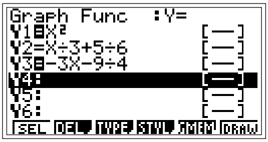



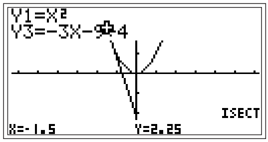


Ответ: в точке (2; 4).

б) Перепишем данное уравнение в виде $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$. Угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых должны удовлетворять условию — их произведение равно -1. Следовательно, угловой коэффициент касательной должен быть равен -3, а т.к.

$2x = -3$, то абсцисса точки касания равна $-\dfrac{3}{2}$. Имеем $y =$ $= \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = -3x - \dfrac{9}{4}$.

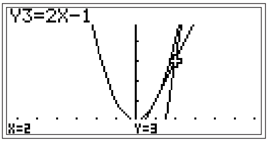


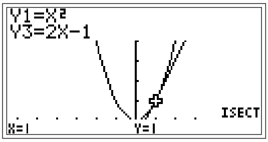
Ответ: в точке (–1,5; 2,25).

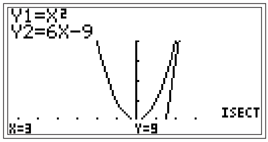
4) *Найдите уравнения касательных к параболе* $y = x^2$*, проходящих через точку* (2; 3).

Комментарий к решению

Обозначим абсциссу точки касания символом x_0. Тогда $y_0 = x_0^2$, $y_0' = 2x_0$. Имеем $y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = -x_0^2 + 2x_0 x$ и, подставляя значения абсциссы и ординаты данной точки, получим квадратное уравнение, решив которое найдем абсциссы двух точек касания: 1 и 3. Следовательно, имеем две касательные: $y = 6x - 9$ и $y = 2x - 1$.







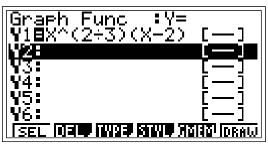
3. Приведем графическую иллюстрацию следующих фактов: если производная функции в какой-либо точке существует, то это означает, что к графику функции в этой точке можно провести касательную (и притом только одну); если же производная в какой-либо точке не существует, то касательную в этой точке провести нельзя или касательная вертикальна.

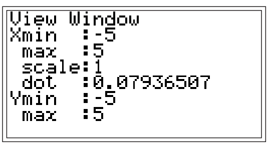
Пусть задана функция $y = x^{\frac{2}{3}} \cdot (x - 2)$. Найдем ее производную:

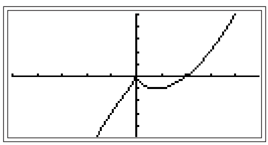
$$y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \cdot (x - 2) + x^{\frac{2}{3}} = \frac{2x - 4 + 3x}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5x - 4}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Производная существует на всей числовой прямой, кроме $x = 0$.

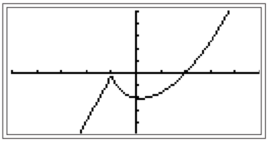
Теперь посмотрим с помощью калькулятора, как ведет себя график:



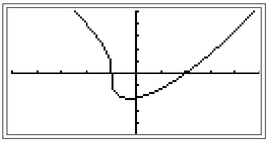




Отметим, что аналогично ведет себя график функции $y=(x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-2)$:



А вот график функции $y=(x+1)^{\frac{1}{3}}\cdot(x-2)$ ведет себя несколько иначе:



В этом случае производная существует на всей числовой прямой, кроме $x = -1$. Касательная вертикальна и проходит через точку $(-1; 0)$.

3.2. Монотонность. Экстремумы

Большинство ошибок учащиеся допускают при построении графика в экстремальных точках и точках, близлежащих к ним. Эти ошибки происходят из-за того, что учащиеся при построении графика функции берут во внимание лишь характер монотонности функции и то, какой экстремум имеет функция в той или иной экстремальной точке. Нередко они забывают учесть, существует ли производная функции в этих точках, и если да, то каково ее значение. Ведь если производная функции в какой-либо точке равна нулю, то это значит, что угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в этой точке, равен нулю. Из этого, в свою очередь, следует, что касательная, проведенная к графику функции в этой точке, параллельна оси абсцисс (и это надлежит учитывать в изображении эскиза графика).

Конечно, соответствующие умения приобретаются с опытом и хорошо, если мы сможем, привлекая калькулятор, помочь учащимся накопить запас наглядных представлений о поведении графиков функций.

При выполнении упражнений позволим учащимся сверить свои построения с изображением на экране калькулятора. Приведем примеры из учебника [1].

295. в) *Исследуйте функцию* $f(x) = 2x - \dfrac{1}{6}x^3$ *на возрастание, убывание и экстремумы и постройте ее график.*

Комментарий к решению

Найдем производную функции $f(x)$:

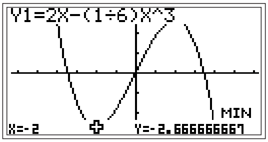
$$f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2.$$

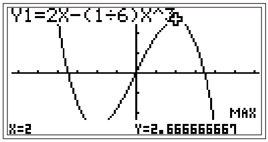
Критических точек, в которых производная не существует, нет.

Заметим, что производная равна нулю при значениях аргумента, равных 2 и –2. Рассматриваемая функция имеет две критические точки.

Функция убывает на $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Функция возрастает на $[-2; 2]$.

Находим значения функции в критических точках, а также нули функции и строим график. Сверяем график с построенным с помощью калькулятора.





295. г) *Исследуйте функцию* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ *на возрастание, убывание и экстремумы и постройте ее график.*

Комментарий к решению

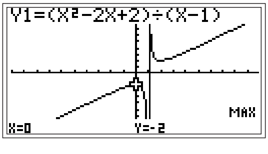
Найдем производную функции $f(x)$:

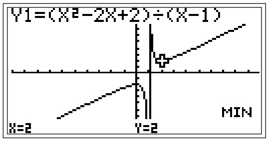
$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Критическая точка, в которой производная не существует, имеет абсциссу, равную 1.

Производная равна нулю при значениях аргумента, равных 0 и 2.

Функция возрастает на $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. Функция убывает на $[0; 1) \cup (1; 2]$. Точек пересечения с осью абсцисс нет, а ось ординат график пересекает в точке $(0; -2)$. Строим график. Сверяем график с построенным с помощью калькулятора.





297. б) *Исследуйте функцию* $y = x^4 + 2x^2 - 3$ *и постройте ее график.*

Комментарий к решению

Проведем исследование по указанной в учебнике схеме.

1. $D(f) = R$, так как f — многочлен.

2. $f(x) = f(-x)$, следовательно функция четная.

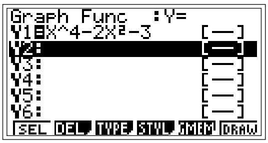
3. Точки пересечения графика с осями координат: $(-\sqrt{3}\,; 0)$, $(\sqrt{3}\,; 0)$ и $(0; -3)$.

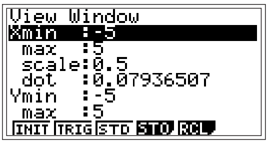
4. $f'(x) = 4x^3 - 4x$. Критических точек, в которых производная не существует, нет. Производная равна нулю при значениях аргумента, равных -1, 0 и 1.

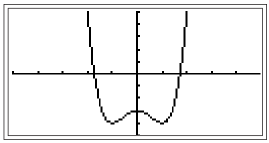
5. В точках с абсциссами, равными -1, 0 и 1, функция соответственно принимает значения -4, -3 и -4 (далее учащиеся оформляют проведенное исследование в виде таблицы, дополняя его определением знака производной в рассматриваемых промежутках).

При построении графика учащиеся должны сопоставить ход кривой в окрестностях экстремальных точек с тем, возможно ли проведение касательных или нет. Причем надо проверить, что в случае равенства нулю производной функции в этих точках касательные должны быть параллельны оси абсцисс (это позволит избежать ошибки — проведение ломаной вместо плавной кривой).

График функции $y = x^4 + 2x^2 - 3$ должен иметь вид, соответствующий изображению на экране калькулятора:







4. ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим, какие возможности предлагает нам графический калькулятор для вычисления интегралов.

Во-первых, калькулятор позволяет вычислять интегралы, непосредственно введенные в виде формул, с отображением на экране калькулятора.

Во-вторых, калькулятор может производить интегрирование функции, уже изображенной графически.

4.1. Вычисление интегралов

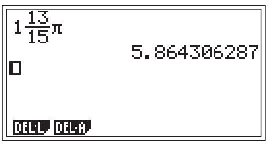
1. Познакомимся сначала с возможностью вычисления определенного интеграла в режиме RUN-MAT калькулятора на примере упражнения № 370 учебника [1, с. 198].

370. а) *Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:* $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

Комментарий к решению

Решим задачу известным учащимся письменным приемом:

$$V(x) = \pi\int_0^1 (x^2+1)^2\,dx = \pi\int_0^1 (x^4+2x^2+1)\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1 = 1\frac{13}{15}\pi.$$

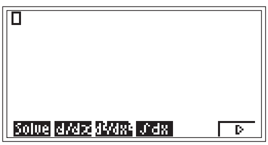


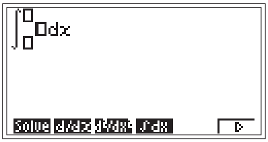
А теперь вычислим наш интеграл с помощью калькулятора.

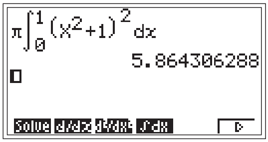
При этом можно поступить по-разному.

Способ 1.

Сначала выведем на экран калькулятора подменю OPTN, затем нажмем [F4] (CALC) и снова [F4] (∫dX — шаблон интеграла). Далее введем подынтегральное выражение и пределы интегрирования.

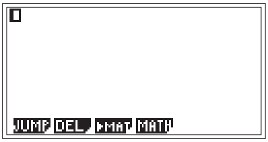


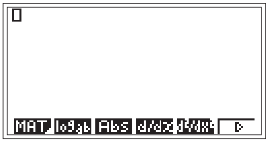


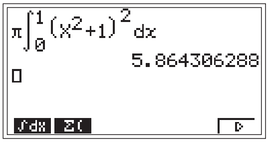


Способ 2.

Интеграл относится в устройстве калькулятора к функциям, которые можно вставлять в формулу, например, как абсолютную величину. Поэтому нажмем на клавишу [F4] (MATH), и, нажав [F6], по стрелке выберем [F1] (∫dX). Далее введем подынтегральное выражение и пределы интегрирования.







Ответ: примерно 6 куб. ед.

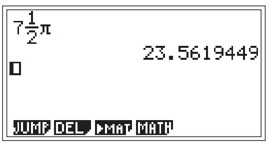
Продолжим упражнения.

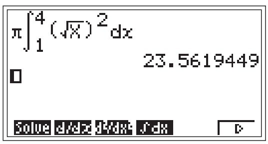
370. б) *Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:* $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

Комментарий к решению

Приведем решение, полученное сначала аналитически, а потом с помощью калькулятора.

Имеем $V(x) = \pi\int\limits_1^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \cdot \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_1^4 = 7\dfrac{1}{2}\pi.$



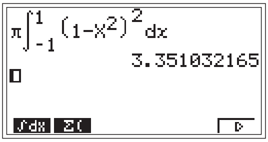


Ответ: примерно 24 куб. ед.

370. г) *Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:* $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

Комментарий к решению

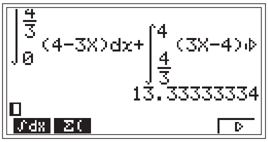
Имеем $V(x) = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 \, dx.$



Ответ: 3,4 куб. ед.

В качестве дополнительного упражнения можно включить задание на нахождение суммы двух интегралов: $\int_{0}^{\frac{4}{3}} (4 - 3x)dx + \int_{\frac{4}{3}}^{4} (3x - 4)dx.$

Выведем на экран и заполним шаблон первого интеграла, нажмем [+], выведем на экран и заполним шаблон второго интеграла, нажмем [EXE]:



Ответ: 13,(3) куб. ед.

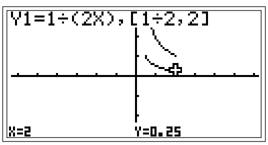
Отметим, что, выполняя преобразования письменно, мы получили бы ответ $\frac{40}{3}$, то есть тот же, что и с калькулятором.

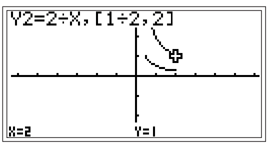
Рассмотрим несколько примеров, при решении которых потребуется вычисление интегралов.

1) *Вращением вокруг оси абсцисс дуг гипербол* $y = \frac{1}{2x}$ *и* $y = \frac{2}{x}$ *на интервале* $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$ *получены две воронки. Во сколько раз площадь выливного отверстия второй воронки больше площади выливного отверстия первой? Во сколько раз объем одной воронки больше объема другой?*

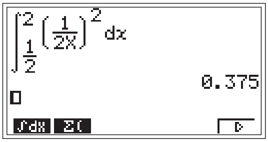
Комментарий к решению

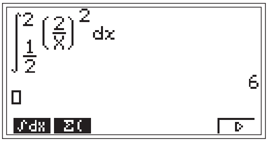
Изобразим воронки схематически в одной системе координат:

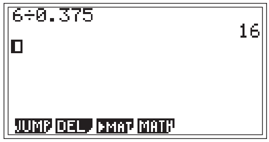




Ответ на первый вопрос очевиден — отношение площадей соответствующих кругов равно шестнадцати. Для ответа на второй вопрос найдем объем каждой фигуры, полученной вращением криволинейной трапеции, и вычислим их отношение:





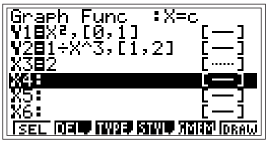


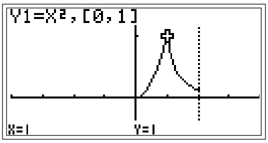
Ответ: площади различаются в 16 раз, объемы различаются в 16 раз.

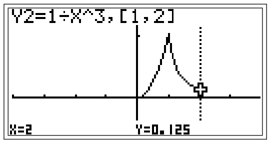
2) *Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, прямой* $x = 2$ *и графиком функции* $y = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1; \\ \dfrac{1}{x^3}, & 1 < x \le 2. \end{cases}$

Комментарий к решению

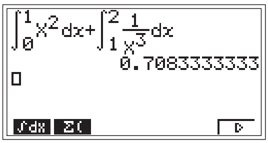
Получить образное представление о фигуре, заданной аналитически, нам поможет калькулятор:







Найдем площадь суммированием интегралов:



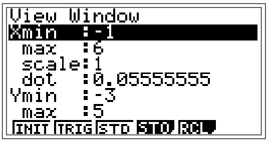
Ответ: примерно 0,7 кв. ед.

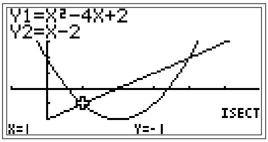
Заметим, что, вычисляя значения интегралов письменно, мы получили бы $\dfrac{17}{24}$, что равно 0,708(3).

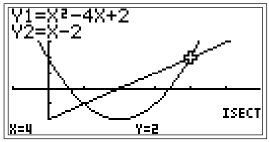
3) *Вычислите площадь фигуры, ограниченной прямой* $y = x - 2$ *и параболой* $y = x^2 - 4x + 2$.

Комментарий к решению

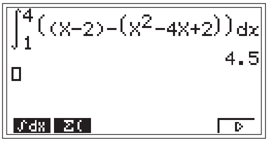
Сначала, рассматривая графики, найдем координаты точек пересечения прямой и параболы, используя функцию ISCT:







Теперь вычислим площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$, параболой $y = x^2 - 4x + 2$ и прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Имеем:

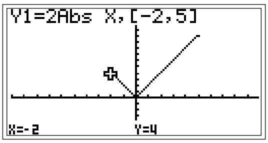


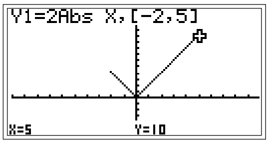
Ответ: 4,5 кв. ед.

2. Понимание геометрического смысла интеграла помогает находить числовые значения интегралов некоторых функций, методы интегрирования которых не известны учащимся. При построении графиков обратимся за помощью к калькулятору. При этом не упустим возможность геометрической интерпретации решения. Приведем примеры.

1) *Вычислите интеграл* $\int\limits_{-2}^{5} 2|x|dx$.

Комментарий к решению

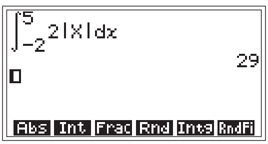




Рассматривая график функции $y = 2|x|$, мы увидим, что должны вычислить сумму интегралов $\int\limits_{-2}^{0}(-2x)dx$ и $\int\limits_{0}^{5}2xdx$. Легко заметить, что фактически надо найти сумму площадей двух прямоугольных треугольников с катетами 2 и 4 ед., 5 и 10 ед.

Получим $\int\limits_{-2}^{0}(-2x)dx + \int\limits_{0}^{5}2xdx = 4 + 25 = 29.$

Этот результат подтверждает калькулятор:

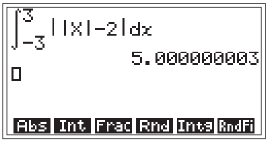


Ответ: 29.

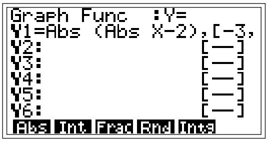
2) *Вычислим интеграл* $\int\limits_{-3}^{3} \left| |x| - 2 \right| dx.$

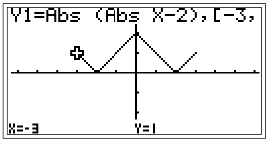
Комментарий к решению

Вычисляя с калькулятором, получим:



Рассмотрим график функции $y = \left| |x| - 2 \right|$ на отрезке $[-3; 3]$:





Мы видим, что график симметричен относительно оси ординат. Поэтому достаточно вычислить удвоенную сумму интегралов функций, заданных на отрезках $[0; 2]$ и $[2; 3]$: $\int\limits_{0}^{2}(-x+2)dx$ и $\int\limits_{2}^{3}(x-2)dx.$ Иначе говоря, достаточно вычислить удвоенную сумму площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами, соответственно равными 2 и 1 ед. Площадь рассматриваемой фигуры равна 5 кв. ед.

Ответ: 5.

3. При изучении определенного интеграла и его свойств недопустим формальный подход к вычислению интегралов. Поэтому прежде чем вычислять интеграл, надо убедиться, что на отрезке интегрирования существует первообразная подынтегральной функции. Чтобы избежать ошибок, желательно приучить учащихся перед формальным интегрированием устанавливать, непрерывна ли данная под интегралом функция. Наглядному представлению сопутствующих ситуаций поможет графическое изображение, полученное с помощью калькулятора. Приведем примеры.

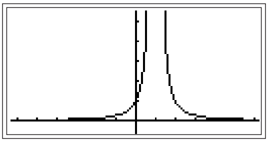
1) *Найдите ошибку в вычислении интеграла:*

$$\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2} = \left.\frac{1}{x-1}\right|_{0}^{3} = -\frac{3}{2}.$$

Комментарий к решению

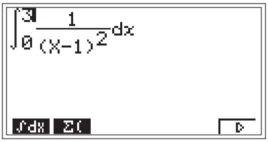
Уже из аналитического задания функции понятно, что функция имеет разрыв на отрезке интегрирования в точке $x = 1$.

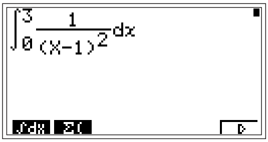
Это подтверждается графиком:



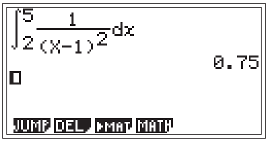
А значит, на отрезке [0; 3] интеграл вычислен быть не может.

На это же, кстати, указывает калькулятор, выдавая сообщение о математической ошибке Ma ERROR (*error*, от англ. — ошибка):





Заменим пределы интегрирования; вычислим интеграл на отрезке [2; 5]:

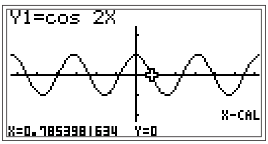


2) *Задайте какие-нибудь значения пределов интегрирования, при которых существует интеграл*

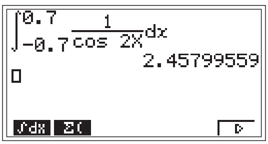
$$\int_a^b \frac{dx}{\cos 2x}.$$

Комментарий к решению

Заметим, что функция $y = \cos 2x$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$ равна нулю при $x = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.



Выберем промежуток, на котором $\cos 2x$ не равен нулю, например $[-0{,}7; 0{,}7]$, и вычислим интеграл $\int_{-0,7}^{0,7} \frac{dx}{\cos 2x}$:

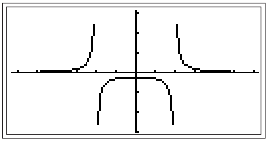


3) *Задайте какие-нибудь значения пределов интегрирования, при которых существует интеграл*

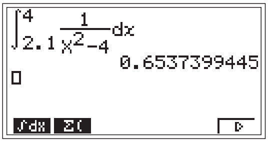
$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 - 4}.$$

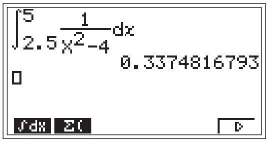
Комментарий к решению

Понятно, что подынтегральная функция в точках 2 и –2 не является непрерывной.



Выберем, например, промежутки [2,1; 4] и [2,5; 5] и выполним вычисления:





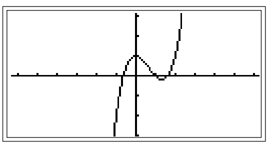
4.2. Интегрирование функций, заданных графически

1. Система команд графического калькулятора позволяет производить интегрирование функции, уже изображенной на экране.

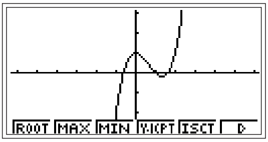
Пример. Вычислим $\int\limits_{-0,5}^{0,5} (x^3 - 2x^2 + 1)dx.$

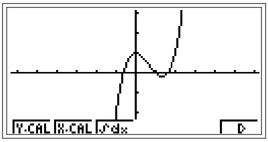
Комментарий к решению

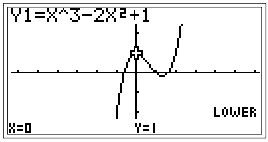
Построим график функции $y = x^3 - 2x^2 + 1$:



Затем войдем в меню G-Solv, стрелкой ([F6]) выведем не уместившиеся на экране команды и выберем команду вычисления интеграла ([F3]). В результате калькулятор перейдет в режим готовности ввода пределов интегрирования, что выражается в появлении курсора на графике и надписи в правом нижнем углу экрана LOWER, означающей, что ожидается ввод нижнего предела интегрирования (*lower*, от англ. — нижний):



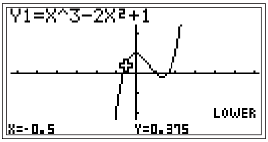


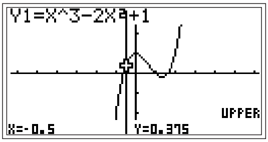


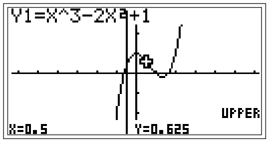
Задать пределы интегрирования можно двумя способами.

Способ 1.

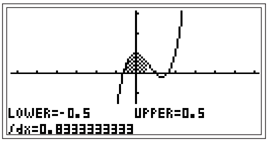
Обозначим пределы интегрирования курсором. Для этого сдвинем курсор в точку с абсциссой, равной –0,5, и нажмем клавишу [EXE] для сохранения заданного значения нижнего предела интегрирования. В результате надпись в правом нижнем углу экрана изменится на UPPER, означающую, что ожидается ввод верхнего предела интегрирования (*upper*, от англ. — верхний). Зададим его, переместив курсор в точку с абсциссой, равной 0,5:





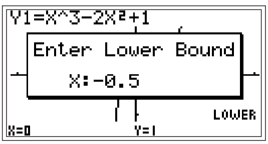


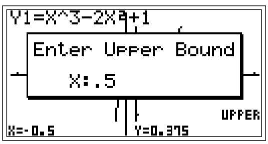
Теперь, нажмем клавишу [EXE] для сохранения заданного значения верхнего предела интегрирования и расчета интеграла:

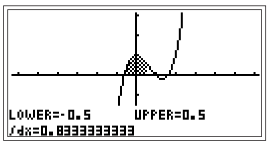


Способ 2.

Нажмем клавишу [X,θ,T]. На экране появится запрос на ввод нижнего предела интегрирования: «Enter Lower Bound» — введите нижний предел. Наберем –0,5 и нажмем [EXE] для сохранения заданного значения нижнего предела интегрирования. Снова нажмем клавишу [X,θ,T]. На экране появится запрос на ввод верхнего предела интегрирования: «Enter Upper Bound» — введите верхний предел. Наберем 0,5 и нажмем клавишу [EXE] для сохранения заданного значения верхнего предела интегрирования и расчета интеграла:







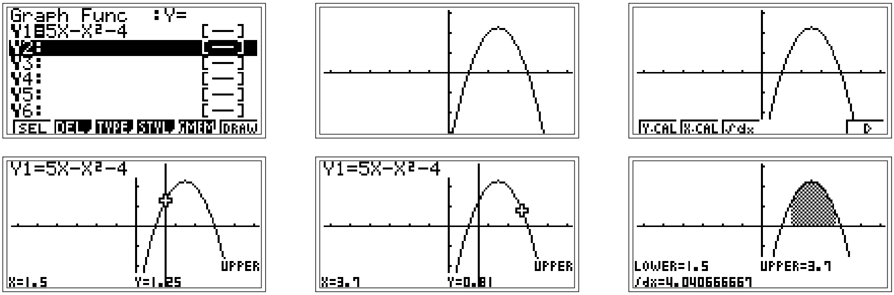
Эти способы различаются тем, что в первом случае значения пределов интегрирования можно выбрать только соответствующие шагу перемещения курсора при данных параметрах окна вывода графика, а во втором случае пределы интегрирования можно задать произвольно.

Ответ: 0,8(3), т.е. примерно 0,8.

В качестве дополнительного упражнения предложим учащимся вычислить интеграл

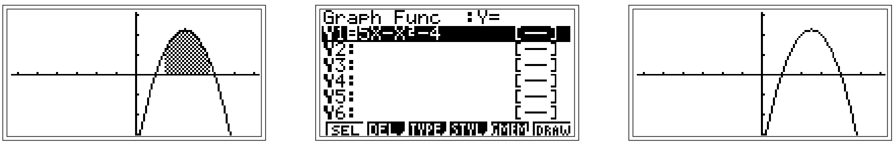
$$\int_{1,5}^{3,7} (5x - x^2 - 4)dx.$$

Комментарий к решению

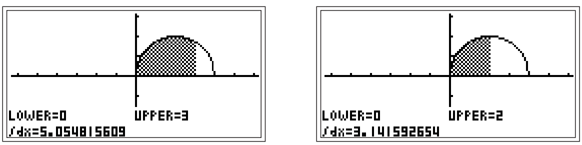


Ответ: примерно 4.

Внимание! Если требуется очистить закрашенную в результате интегрирования область графика, нужно вернуться к списку функций, снять выделение с проинтегрированной функции, нажав [F1], и повторно выделить ее для построения, снова нажав [F1]:



Например, будем менять пределы интегрирования функции $y = \sqrt{4x - x^2}$.

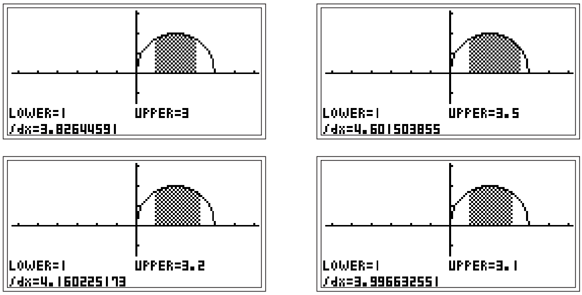


2. Упражнения на вычисление площадей криволинейных трапеций (результаты можно сопоставить с полученными на калькуляторе), предлагаемые учебником, дополним новыми — на поиск пределов интегрирования.

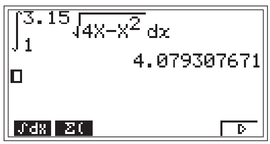
1) *Найдите верхний предел интегрирования* $\int_1^b \sqrt{4x - x^2}\,dx$ *такой, чтобы площадь криволинейной трапеции стала равной примерно четырем.*

Комментарий к решению

Будем искать ответ последовательными приближениями, задавая верхний предел интегрирования в соответствии с изменением площади. Имеем



Следовательно, в качестве верхнего предела интегрирования можно выбрать 3,2 или 3,1, либо 3,15. Итог можно проверить непосредственным вычислением интеграла в режиме RUN-MAT калькулятора:

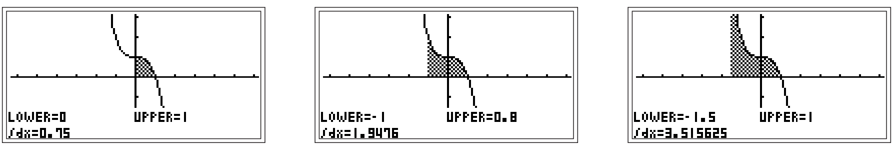


Ответ: $b = 3{,}15$.

2) *Найдите нижний предел интегрирования* $\int_a^1 (1 - x^3)\,dx$ *такой, чтобы площадь криволинейной трапеции стала равной примерно* 3,5.

Комментарий к решению

Придав a значения 0, –1, –1,5, получим нужный результат:

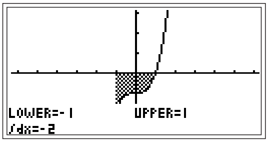


Ответ: $a = -1{,}5$.

3) *Найдите нижний предел интегрирования* $\int_a^1 (x^3-1)\,dx$ *такой, чтобы площадь криволинейной трапеции стала равной примерно* 2.

Комментарий к решению

Заметим, что график данной функции симметричен относительно оси x графику, рассмотренному в предыдущем упражнении, поэтому, используя проведенные в процессе его решения наблюдения, можно легко выполнить данное задание. Действительно, придав a значение –1, получим нужный результат (отметим, что при этом значение интеграла — отрицательное число):



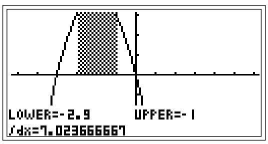
Ответ: $a = -1$.

Дополнительно:

4) *Найдите пределы интегрирования такие, чтобы площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой* $y = -x^2 - 4x$*, стала равной примерно* 7.

Комментарий к решению

Ответ может быть таким: пределы интегрирования –2,9 и –1. Действительно:



5. СТЕПЕНИ И КОРНИ

5.1. Степень с рациональным показателем

1. В связи с введением понятия степени с рациональным показателем рассмотрим простейший случай: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Покажем, как найти с помощью калькулятора значение корня n-й степени при $n > 2$, т.е. как вычислить $\sqrt[n]{a}$.

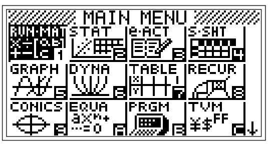
Пример. Пусть $n = 6$ и $a = 729$. Найдем корень $\sqrt[6]{729}$.

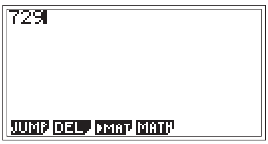
Комментарий к решению

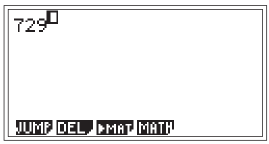
Проведем вычисления в режиме RUN-MAT. Предварительно убедимся, что в меню настроек SET UP в строке режима ввода Input Mode задан математический ввод Math.

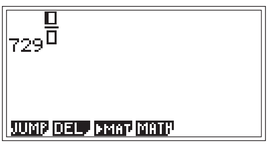
Способ 1.

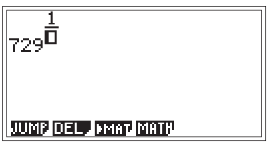
Воспользуемся определением: если a — положительное число, $\dfrac{1}{n}$ — дробное число (n — натуральное число), то $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Введем основание степени — 729. Нажмем клавишу [∧] для вывода на экран шаблона степени. Нажмем [a^b/c] для вывода шаблона дроби, заполним его и нажмем [EXE] для получения ответа:

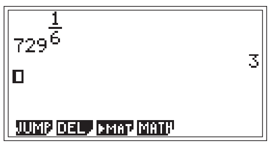






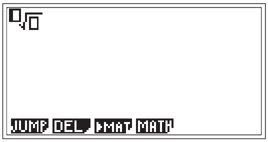


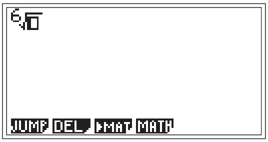


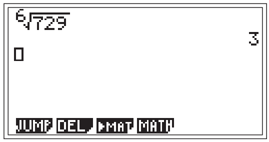


Способ 2.

Введем расчетное выражение в исходном виде. Для этого нажмем [SHIFT] и [∧] для вывода на экран шаблона корня произвольной степени $\sqrt[x]{\ }$, который надписан желтым шрифтом над клавишей [∧]. Заполним поле показателя степени и нажмем стрелку вправо клавиши [REPLAY] для перевода курсора в поле подкоренного выражения. Введем 729 и нажмем [EXE] для выполнения расчета:







В качестве иллюстрации применения нового умения можно рассмотреть следующие примеры.

1) Интересно, что:

$\sqrt{81} = 8 + 1 = 9$, $\sqrt[3]{5832} = 5 + 8 + 3 + 2 = 18$, $\sqrt[3]{19683} = 27$.

Что вы заметили? Сформулируйте замеченную особенность для таких радикалов. Обладают ли этой особенностью следующие радикалы:

а) $\sqrt[4]{1679616}$, $\sqrt[4]{42305621}$, $\sqrt[5]{60466176}$;

б) $\sqrt[6]{24794911296}$, $\sqrt[6]{830376525}$;

в) $\sqrt[8]{248155780267521}$?

Проверьте себя, выполнив задание разными способами:

– вычислением степени с дробным показателем;

– непосредственным извлечением корня;

– возведением в степень с натуральным показателем суммы цифр числа, стоящего под знаком радикала.

2) Возможно, учащимся известна замечательная числовая последовательность, обнаруженная итальянским математиком Леонардо Фибоначчи. Ее первый член равен единице, затем идет еще одна единица, а каждый следующий член равен сумме двух предыдущих:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

Ряд Фибоначчи обладает поразительными свойствами. Одно из них непосредственно связано с золотым сечением:

отношение любого члена последовательности Фибоначчи к предыдущему приближенно равно отношению золотого сечения.

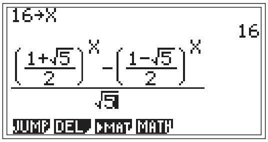
Задание 1. *Продолжите данную последовательность чисел и проверьте, вычисляя отношения на калькуляторе, что такое приближение тем лучше, чем больше номера двух последовательных чисел Фибоначчи.*

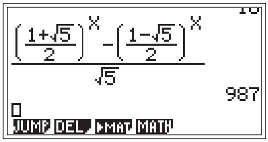
Задание 2. *Французский математик Ж. Бине нашел формулу для вычисления n-го члена последовательности Фибоначчи (обозначим его F_n):*

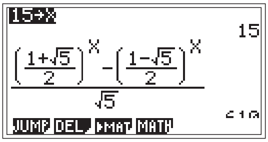
$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

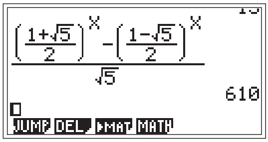
Найдите новое приближение к золотому сечению, использовав формулу для чисел F_{16} и F_{15} и вычислив их отношение. Задайте сами какое-нибудь новое приближение к золотому сечению.

Совет для учащихся: чтобы довольно сложную формулу не вводить в калькулятор дважды, воспользуемся возможностью вычислять на калькуляторе числовое значение буквенного выражения для заданного значения буквы. В данном случае найдем значение буквенного выражения сначала для $n = 16$, а затем для $n = 15$

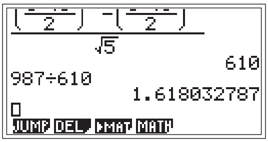






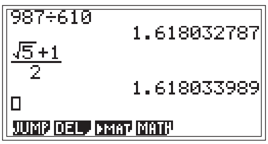


и вычислим их отношение:

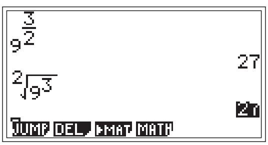


Получим $987 : 610 \approx 1{,}618032787$.

Заметим, что вычисленное отношение довольно близко к величине золотого сечения, найденной по известной формуле $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$:



2. Теперь понятно, как вычислить с калькулятором степень с рациональным показателем $r = \dfrac{m}{n}$. Найдем, к примеру, значение выражения $9^{\frac{3}{2}}$ (двумя способами):

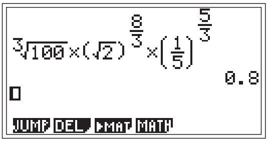


Новое умение позволит учащимся подключить калькулятор к самопроверке при выполнении довольно кропотливой работы по преобразованию числовых и буквенных выражений.

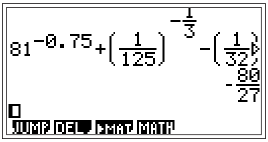
Рассмотрим несколько упражнений из учебника [1] с проверкой их выполнения на калькуляторе.

1) *Преобразование числовых выражений.*

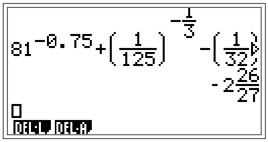
431. б) $\sqrt[3]{100}\cdot(\sqrt{2})^{\frac{8}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{2^2\cdot 5^2}\cdot 2^{\frac{4}{3}}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}=2^2\cdot 5^{-1}=\frac{4}{5}.$



437. а) $81^{-0,75}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(3^4\right)^{-0,75}+\left(5^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}-\left(2^{-5}\right)^{-\frac{3}{5}}=\frac{1}{27}-3=$ $=-2\frac{26}{27}.$



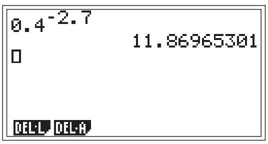
или



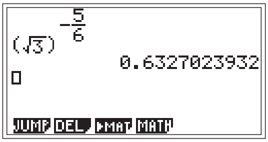
Для перевода ответа из неправильной дроби в смешанную или обратно нужно его выделить и последовательно нажать клавиши [SHIFT] и [F↔D]. Если нажимать только клавишу [F↔D], то будет осуществляться преобразование ответа из десятичной дроби в такую обыкновенную, которая задана в строке Frac Result меню настроек SET UP.

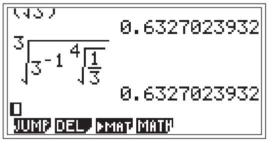
2) *Сравнение чисел.*

436. б) $A = 0{,}4^{-2,7}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{27}{10}}$; $B=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{15}{7}}$, $\frac{27}{10}>\frac{15}{7}$. Следовательно, $A > B$.



441. а) $A = \left(\sqrt{3}\right)^{-\frac{5}{6}} = 3^{-\frac{5}{12}}$; $B = \sqrt[3]{3^{-1}\sqrt[4]{\frac{1}{3}}} = 3^{-\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{12}} = 3^{-\frac{5}{12}}$. Следовательно, A = B.



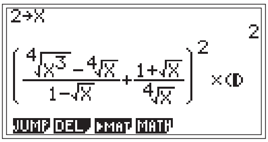


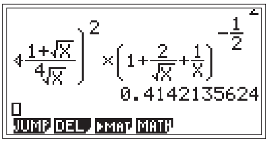
3) *Преобразование буквенных выражений.*

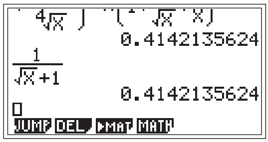
438. б) $$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)^2\cdot\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{x-\sqrt{x}+1-x}{(1-\sqrt{x})\sqrt[4]{x}}\right)^2 \times$$

$$\times\left(\frac{x\sqrt{x}+2x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\left(\left(\sqrt{x}+1\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Проверим преобразование подстановкой значения x, равного, например, 2.







5.2. Степенная функция

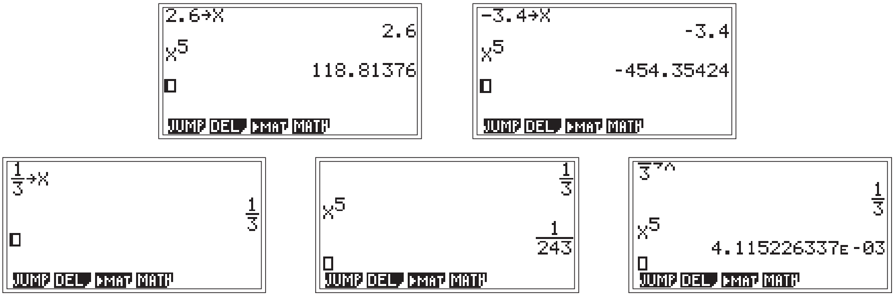
1. Функция $y = x^n$, где n — натуральное число и $n \geq 2$.

Если учащиеся не знакомы со степенной функцией, то рекомендуем рассмотреть упражнения, связанные с вычислением значений функции $y = x^n$, построением ее графика и решением по графику уравнений вида $x^n = a$.

1) *Найдите значения функции $y = x^5$ при x* = 2,6; –3,4; $\frac{1}{3}$.

Комментарий к решению

Решение сводится к вычислению значений выражения x^5 подстановкой вместо x данных числовых значений:

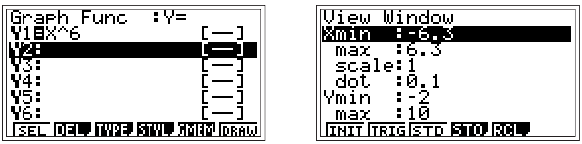


Мы использовали команду присваивания, придав x нужные значения, но можно было и просто записать числовое выражение. В последнем примере с помощью клавиши [F↔D] результат был переведен из обыкновенной дроби в десятичную.

2) *Постройте график функции* $y = x^6$.

Комментарий к решению

Задавая параметры окна вывода графиков, оставим стандартные значения параметров для X, а по Y график несколько «ужмем»:



Полученный график напоминает график квадратичной зависимости, но его ветви устремлены вверх более круто. В режиме Trace учащиеся могут определить значения функции для нескольких значений x (например для $x = 0$; 0,5; 1; 1,2; 1,4).

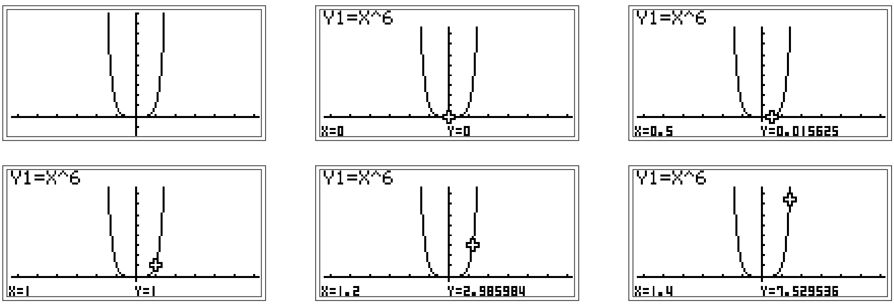
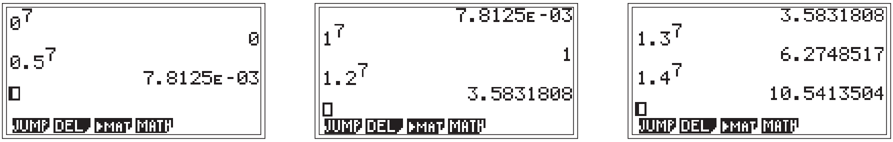


График функции может быть с достаточно высокой точностью перенесен в тетрадь. Соответствующие точки отмечаются в тетради на координатной плоскости, а поскольку функция $y = x^6$ четная, то отмечаются и точки, симметричные им относительно оси y.

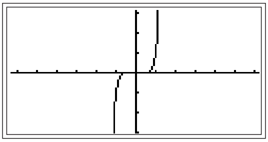
3) *Постройте с помощью калькулятора график функции* $y = x^7$.

Комментарий к решению

Найдем координаты нескольких точек графика:



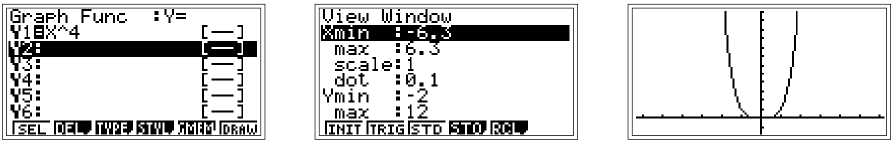
Имеем точки (0; 0), (0,5; 0,008), (1; 1), (1,2; 3,6), (1,3; 6,3), (1,4; 10,5). В тетради построим точки с данными координатами и симметричные им относительно начала координат. Соединим точки. Сравним построенный график с графиком, полученным на калькуляторе:

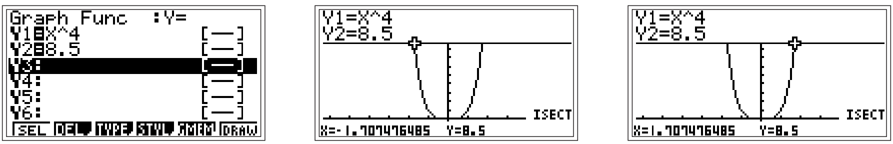


4) *Пользуясь графиком функции* $y = x^4$, *решите уравнение* $x^4 = 8{,}5$.

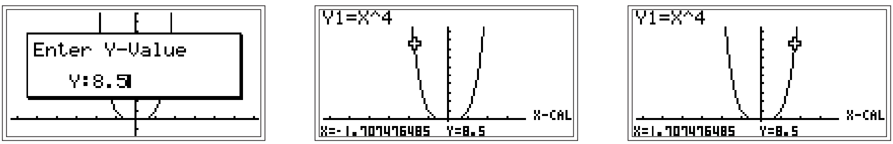
Комментарий к решению

Для наглядности проведем прямую $y = 8{,}5$. Точку пересечения графиков функций найдем в режиме G-Solv (ISCT):





Можно поступить иначе — воспользоваться командой X-CAL режима G-Solv:

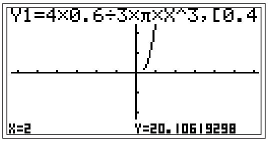


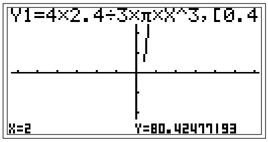
5) Степенные зависимости более высокого порядка (чем линейные и квадратичные) тоже нередко встречаются на практике. Рассмотрим пример.

Задайте формулой массу какого-либо шарика (деревянного или стеклянного) и рассмотрите график изменения его массы в зависимости от изменения его радиуса.

Комментарий к решению

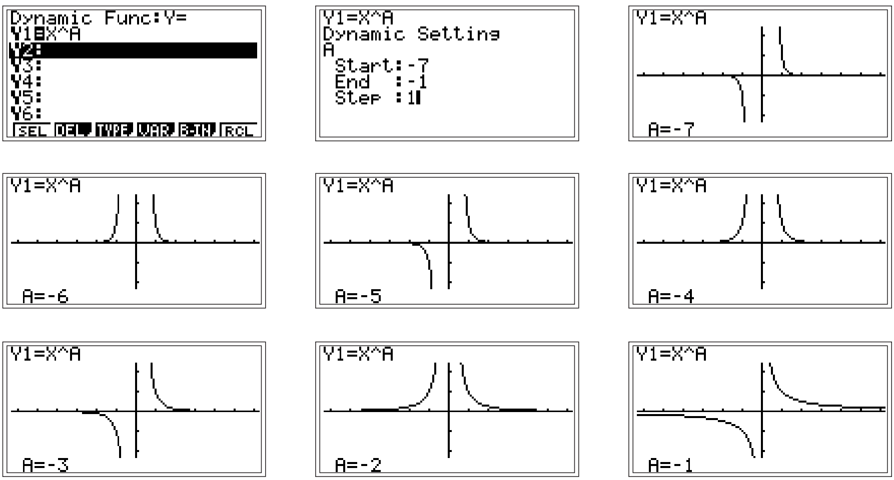
Масса шара является кубической функцией его радиуса $m = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$. Плотность дерева — 0,6 г/см^3, а стекла — 2,4 г/см^3. Масса деревянного шарика вычисляется по формуле $m = \frac{4 \cdot 0,6}{3}\pi R^3$, а масса стеклянного — по формуле $m = \frac{4 \cdot 2,4}{3}\pi R^3$. Построим графики изменения массы в зависимости от изменения радиуса R, например от 0,4 до 5 см. Прочитаем результаты для $R = 2$:





2. Функция $y = x^{-n}$, где n — натуральное число.

В данном случае мы получаем функцию $y = \frac{1}{x^n}$, и надо рассмотреть ее график при четном и нечетном n. Для наглядной иллюстрации имеет смысл привлечь калькулятор и выполнить построения в динамическом режиме:



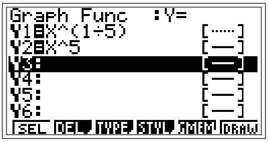
3. Функция $y = \sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число.

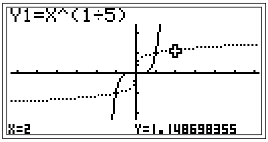
Важную роль приобретают графики для выяснения вопроса о существовании корня n-й степени из числа.

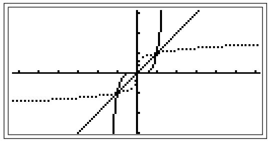
Если n — нечетное число, то любое число может быть значением функции $y = x^n$. Зависимость x от y обозначают так: $x = \sqrt[n]{y}$ — или, переходя к обычным обозначениям, так: $y = \sqrt[n]{x}$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^5$ и $y = \sqrt[5]{x}$.

Поступим, например, так: преобразуем $y = \sqrt[5]{x}$ в $y = x^{\frac{1}{5}}$, а поскольку в графическом режиме возможна только линейная запись, то введем выражение в виде X^(1÷5):

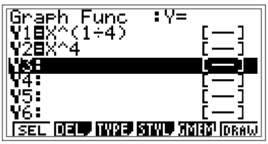






Построенные графики симметричны относительно прямой $y = x$.

Если n — четное число, то функция $y = x^n$ не является монотонной и область значений для $y = \sqrt[n]{x}$ есть множество $[0;\ +\infty)$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^4$ и $y = \sqrt[4]{x}$.



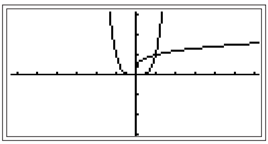
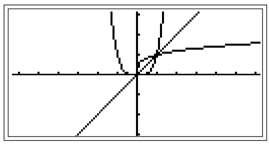
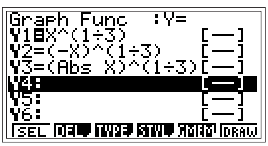



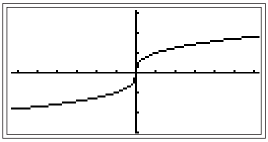
График функции $y = \sqrt[4]{x}$ симметричен относительно прямой $y = x$ для правой ветви графика $y = x^4$ (расположенной в первой координатной четверти).

Предложим учащимся построить в тетради графики более сложных функций из учебника [5, с. 95] и сравнить свой эскиз с изображением графика на экране калькулятора.

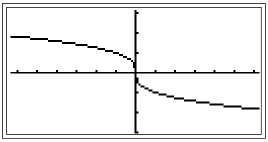
1) $y = \sqrt[3]{x}; y = \sqrt[3]{-x}; y = \sqrt[3]{|x|}$.



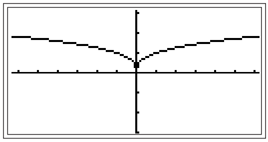
$y=\sqrt[3]{x}$:



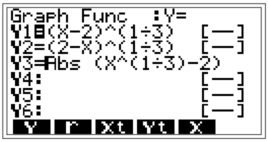
$y=\sqrt[3]{-x}$:



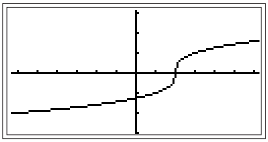
$y=\sqrt[3]{|x|}$:



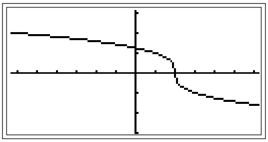
2) $y=\sqrt[3]{x-2}; y=\sqrt[3]{2-x}; y=\left|\sqrt[3]{x}-2\right|.$



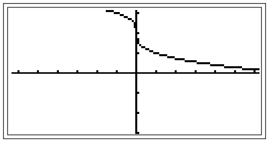
$y=\sqrt[3]{x-2}$:



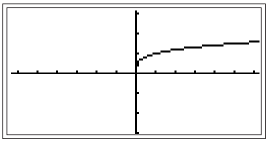
$y=\sqrt[3]{2-x}$:

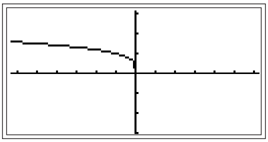


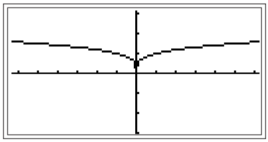
$y=\left|\sqrt[3]{x}-2\right|$:



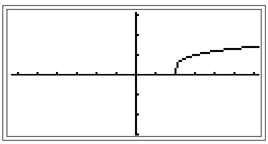
3) $y=\sqrt[4]{x}; y=\sqrt[4]{-x}; y=\sqrt[4]{|x|}$:

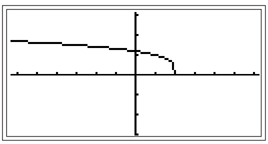


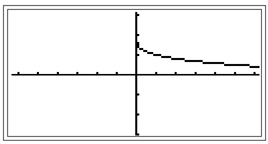




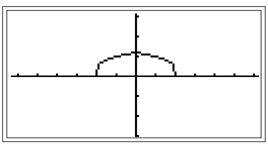
4) $y=\sqrt[4]{x-2}; y=\sqrt[4]{2-x}; y=\left|\sqrt[4]{x}-2\right|$:

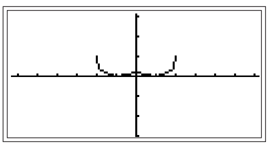






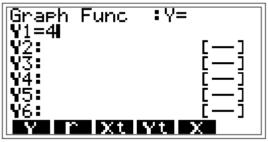
5) $y=\sqrt[4]{2-|x|}; y=\left|\sqrt[4]{2-|x|}-1\right|$:

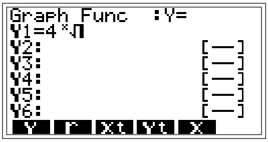


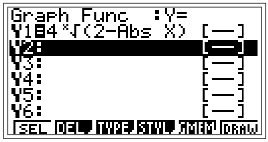


Примечание.

В линейном формате ввода записывать функции вида $\sqrt[n]{x}$ можно непосредственно используя знак радикала. Рассмотрим, например, функцию $y = \sqrt[4]{2-|x|}$. Сначала введем показатель степени, в данном случае 4. Затем введем знак корня произвольной степени, нажав [SHIFT] и [$\wedge$]. После этого введем подкоренное выражение.





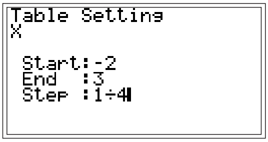


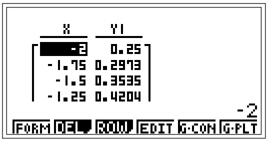
6. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

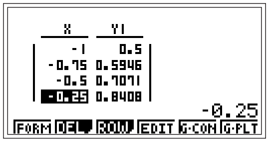
6.1. Показательная функция

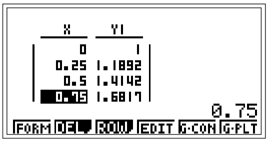
1. В учебнике [1] предлагается выполнить построение графиков функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ на отрезке $[-2; 3]$ с шагом $\frac{1}{4}$, а затем с шагом $\frac{1}{8}$. Мы же можем этот процесс построений выполнить не только в тетради, но и на калькуляторе, продолжив построения с шагом $\frac{1}{16}$ и $\frac{1}{32}$.

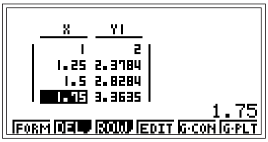
Для функции $y = 2^x$ имеем:

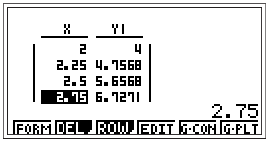


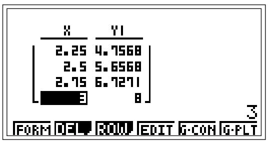


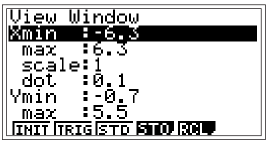


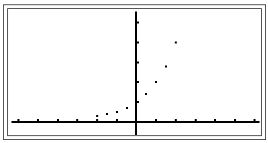


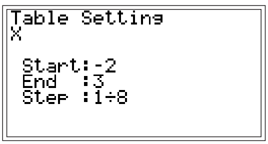


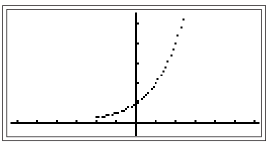


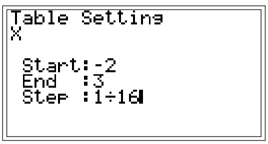


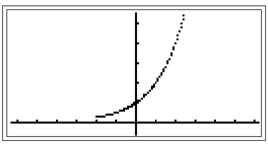


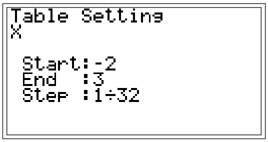


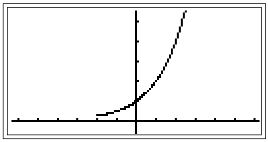






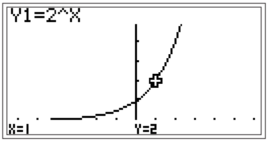


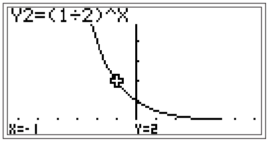




Точно так же можно провести исследование функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

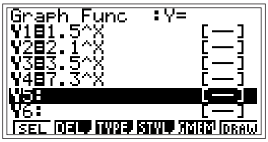
В режиме GRAPH графики рассматриваемых функций выглядят так:

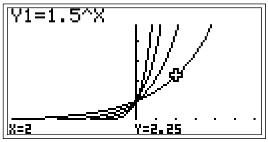




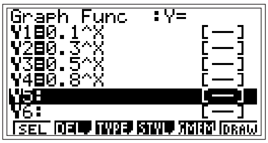
Для исследования показательной функции $y = a^x$ построим в одной и той же координатной плоскости несколько графиков, изменяя значения основания a. Такое графическое и вербальное сопоставление поможет лучшему усвоению, а, следовательно, и применению свойств показательной функции.

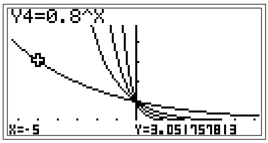
$a > 1$:





$0 < a < 1$:





Отмечаем:

– область определения — множество всех действительных чисел;

– монотонность: при $a > 1$ функция $y = a^x$ строго возрастает; при $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ строго убывает;

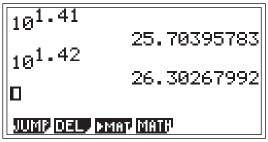
– положительность: значения функции $y = a^x$ положительны (при любом основании $a > 0$);

– область значений — множество всех положительных чисел.

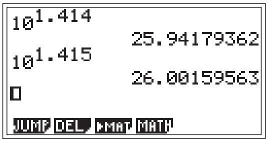
2. Предложенное в учебнике [1, с. 228] упражнение № 451 выполним с калькулятором.

Вычислим с точностью до 0,1 *(пользуясь таблицами или калькулятором) значения степени* 10.

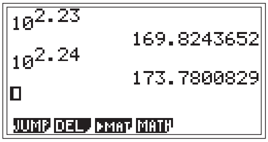
а) $10^{1,41} \approx 25,7$; $10^{1,42} \approx 26,3$.



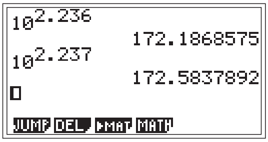
б) $10^{1,414} \approx 25,9$; $10^{1,415} \approx 26,0$.



в) $10^{2,23} \approx 169,8$; $10^{2,24} \approx 173,8$.

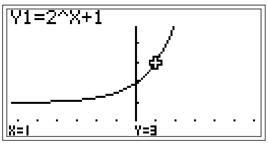


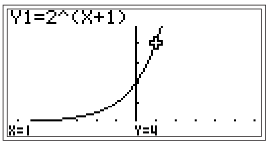
г) $10^{2,236} \approx 172,2$; $10^{2,237} \approx 172,6$.



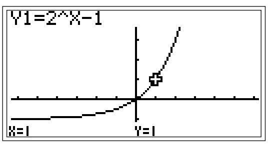
3. Перед выполнением дальнейших упражнений, предлагаемых учебником, полезно построить в тетради и сравнить с изображением на экране калькулятора графики функций:

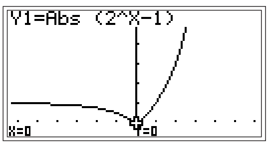
а) $y = 2^x + 1$; $y = 2^{x+1}$:



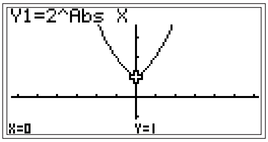


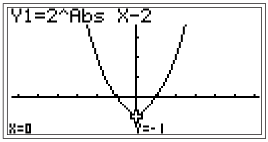
б) $y = 2^x - 1$; $y = |2^x - 1|$:





в) $y = 2^{|x|}$; $y = 2^{|x|} - 2$:

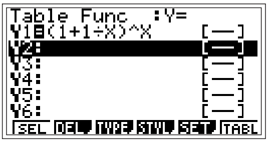


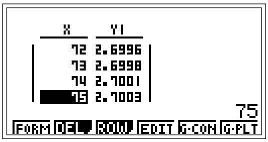


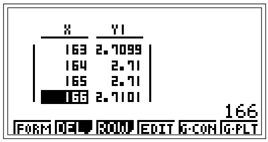
4. Число *e*. Следуя изложению соответствующего материала в учебнике [5, с. 116], рассмотрим переменную $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Переменная u_n имеет предел. Этот предел называют числом *e*:

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Постараемся экспериментально определить несколько знаков числа *e*, вычисляя значения членов последовательности u_n при n от 1 до 250, что нам позволяет табличный режим калькулятора:

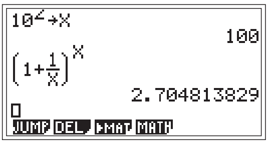


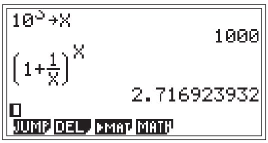


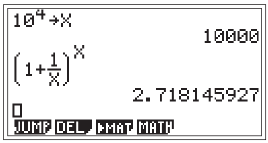


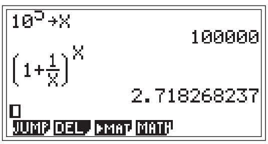
Заметим, что при $n = 75$ получается 2,7003, т. е. два знака числа *e*; при $n = 166$ получается 2,7101, т. е. три знака числа *e*.

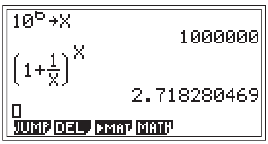
Далее поступим иначе — проведем расчеты непосредственно в режиме вычислений RUN-MAT при n, равном 100, 1000, 10000 и т. д. (отметим, что можно использовать любую букву, например X). Теперь мы получим девять знаков числа *e*:

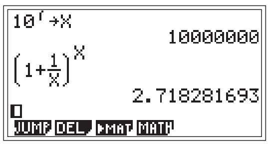


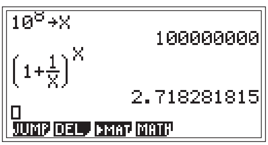


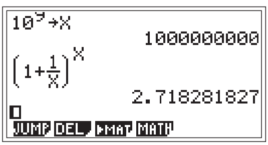


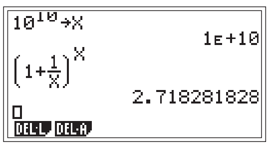




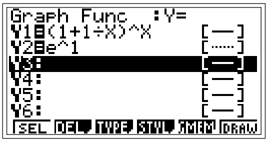


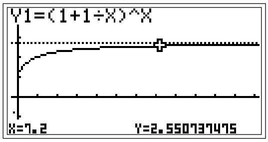






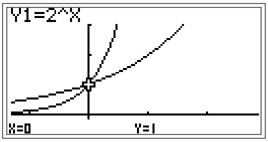
В учебнике [5, с. 119] также отмечается, что равенство $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ справедливо и тогда, когда n стремится к бесконечности, пробегая любые числовые значения, необязательно натуральные. Графически этот факт проиллюстрируем следующим образом:

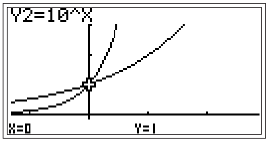




И, наконец, сообщим учащимся чрезвычайно интересный и важный факт, связанный с рассмотрением показательной функции по основанию *e*.

Сначала отметим, что графики показательных функций при различных значениях a проходят через точку (0; 1):

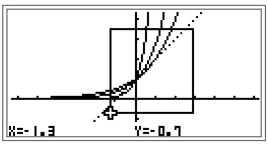


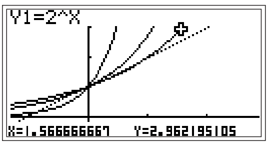


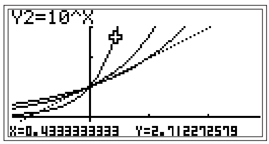
Если в этой точке к графику провести касательную, то чем больше основание a, тем «круче» касательная. Известно, что при $a = 2$ угловой коэффициент касательной равен примерно 0,7, а при $a = 10$ — примерно 2,3.

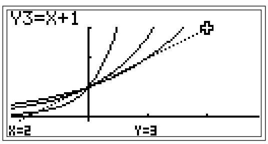
Понятно, что при непрерывном изменении a от 2 до 10 угловой коэффициент касательной в точке (0; 1) будет непрерывно меняться и найдется такое значение a, при котором этот коэффициент будет равен 1. Такое основание обозначается буквой *e*.

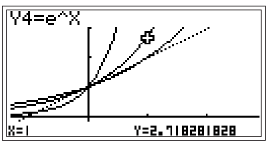
Привлечем калькулятор к анализу данного факта. Рассмотрим графики функций $y = 2^x$, $y = 10^x$ и $y = e^x$ относительно прямой $y = x + 1$. Для этого воспользуемся режимом BOX:

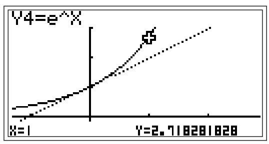






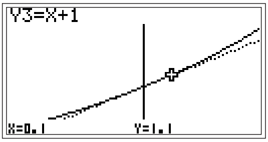


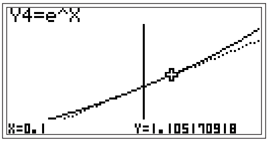


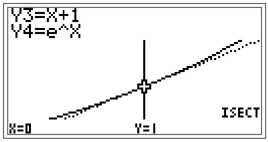


Мы видим, что графики функций $y = 2^x$, $y = 10^x$ пересекают прямую $y = x + 1$. При приближении к точке (0; 1) график функции

$y = e^x$ остается выше прямой $y = x + 1$ и имеет с ней единственную общую точку (0; 1):



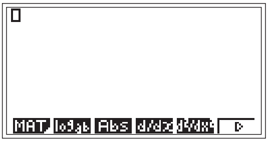




6.2. Логарифмическая функция

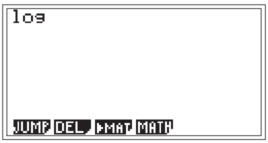
1. С помощью калькулятора можно вычислять логарифмы по любому основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$).

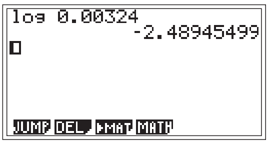
1) Вычислим $\log_3 19683$. Для этого в режиме RUN-MAT откроем подменю MATH ([F4]); выведем на экран шаблон $\log_a b$ логарифма с произвольным основанием, нажав [F2]; введем нужные числа и выполним вычисления, нажав [EXE]:



Имеем: $\log_3 19683 = 9$.

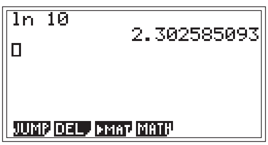
2) Вычислим $\lg 0{,}00324$. В данном случае поступим иначе, т.к. функция вычисления десятичного логарифма присвоена клавише [log]. Нажмем [log] для вывода на экран шаблона десятичного логарифма, введем нужное число и нажмем [EXE]:





Имеем: $\lg 0{,}00324 \approx -2{,}4895$.

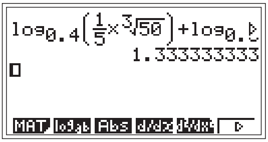
3) Вычислим $\ln 10$ (функция натурального логарифма присвоена клавише [ln]):



Имеем: $\ln 10 \approx 2{,}3026$.

Теперь учащиеся смогут проверить верность преобразования довольно сложных логарифмических выражений, встречающихся в учебниках, например [5, с. 130, № 5.24, б]:

$$\log_{0,4}\left(\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{50}\right)+\log_{0,6}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)+\log_{0,32}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right):$$

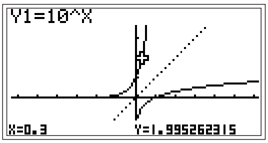


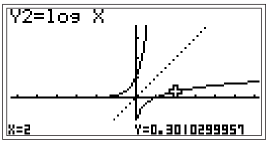
2. Так как определение логарифмов основано на понятии степени, то при исследовании логарифмической функции используют свойства показательной функции: область определения — множество всех положительных чисел; монотонность: при $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает, при $0 < a < 1$ логарифмическая функция строго убывает; область значений — множество всех действительных чисел.

Построим в одной и той же координатной плоскости графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание. С помощью курсора покажем, что графики симметричны относительно прямой $y = x$.

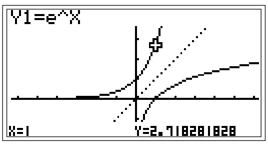
Сначала рассмотрим поведение функций при $a > 1$.

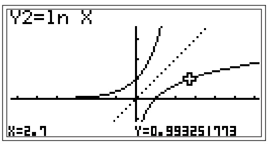
При $a = 10$ имеем:



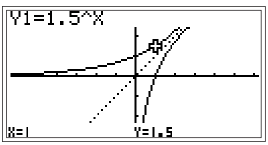


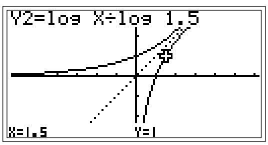
При $a = e$ имеем:





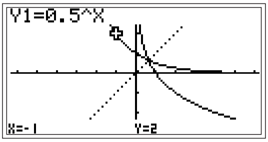
При $a = 1,5$ воспользуемся формулой перехода от одного основания логарифма к другому основанию: $\log_{1,5} x = \dfrac{\lg x}{\lg 1,5}$. Имеем:

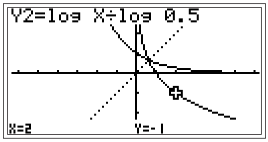




Теперь рассмотрим поведение функций при $0 < a < 1$.

При $a = 0{,}5$ также воспользуемся формулой перехода от одного основания логарифма к другому основанию: $\log_{0,5} x = \dfrac{\lg x}{\lg 0{,}5}$. Имеем:

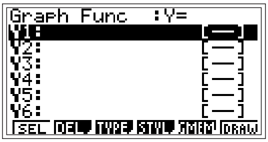


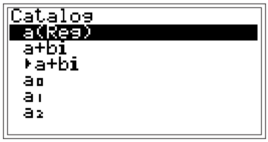


Примечание.

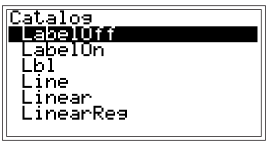
В последних двух примерах можно было осуществить прямой ввод логарифмических функций с произвольным основанием. Покажем, как это делается, на примере функции $y = \log_{0,5} x$.

Выведем на экран список функций и выделим одну из строк для ввода данной функции. Нажмем [SHIFT], [4] (CATALOG). На экране появится список всех функций и команд, заложенных в калькулятор, в котором первая строка выделена цветом:

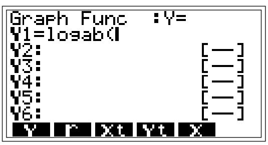


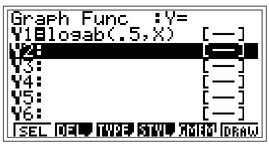


Для быстрого поиска нажмем [ALPHA], [→] (L), что приведет к выводу на экран списка функций, начинающихся с буквы L. Теперь стрелкой вниз клавиши [REPLAY] переместим выделение на строку logab(и нажмем [EXE]:



В результате в строке ввода появится шаблон логарифма. В скобках введем аргументы данной функции: сначала основание логарифма 0,5, затем разделитель — запятую ([,]) и число X.





Оглавление

Учебное издание

Минаева С.С.

Методические рекомендации к изучению алгебры и начал анализа в 10–11 классах с использованием возможностей применения малых вычислительных средств

Ответственный редактор *Н.С.Никитина*
Художественное оформление: *А.В.Аксенов*
Компьютерная верстка: *Л.А.Вишнякова*

Подписано в печать 01.10.2008. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 5,75.
Тираж 500 экз. Заказ №

Издательско-полиграфическая фирма ООО «Принтберри».
Москва, проезд Комсомольской площади, 12.
Тел./факс: (495) 545-4763. e-mail: info@printberry.ru